

Cours de Troisième

Table des matières

1	Calcul littéral, première partie	2
1.1	Vocabulaire	2
1.2	Formules à connaître parfaitement	2
1.3	Exemples de développements	2
1.3.1	Utilisation en calcul mental	2
1.3.2	Avec des lettres	2
2	Rappels pour développer une expression littérale	3
2.1	Conventions d'écriture	3
2.2	Multiplications et additions littérales	3
2.2.1	Multiplications	3
2.2.2	Additions	3
2.3	Règles de suppression des parenthèses	3
3	Rappel Théorème de Pythagore	4
3.1	Configurations	4
3.2	Enoncé du théorème	4
3.3	Exemples	4
4	Fonctions : généralités	5
4.1	Définitions	5
4.2	Exemple de fonctions définies par un tableau, images et antécédents	5
4.3	Exemple de fonctions définies par un graphique, images et antécédents	5
5	Théorème de Thalès	6
5.1	Configurations	6
5.2	Enoncé du théorème	6
5.3	Exemples	6
6	Nombres Premiers	7
6.1	Rappels	7
6.1.1	Diviseurs d'un nombre	7
6.1.2	Critères de divisibilité	7
6.2	Nombres premiers	7
6.3	Décomposition des nombres entiers	7
6.4	Fraction irréductible	7
7	Transformations Géométriques	8
7.1	Translations	8
7.2	Rotations	8
7.3	Homothéties	9
8	Calcul littéral : factoriser et résoudre des équations	10
8.1	Factorisation	10
8.2	Equations	10
8.2.1	Equations produits	10
9	Rappel Réciproque du Théorème de Pythagore	11
9.1	Configuration	11
9.2	Enoncé du théorème	11
9.3	Exemples	11
10	Trigonométrie	12
10.1	Formules à connaître parfaitement	12
10.2	Utilisation de la calculatrice	12
10.3	Calculs d'angles dans un triangle rectangle	12
10.4	Calculs de longueurs dans un triangle rectangle	12

1 Calcul littéral, première partie

Introduction

Les lettres (x, y, z, \dots) utilisées en mathématiques servent à désigner des nombres dont on ne connaît pas les valeurs. Cela est très utile pour :

- Ecrire des formules par exemple : $\mathcal{A}_{\text{Disque}} = \pi \times r^2$
- Démontrer des propriétés, par exemple sur les nombres cf partie activité sur la somme de trois nombres consécutifs
- Résoudre des problèmes que l'on modélise à l'aide d'équations
- Et bien d'autres choses que l'on découvrira dans les futurs chapitres notamment celui des fonctions

1.1 Vocabulaire

Définition (Développer)

Développer c'est transformer un produit (résultat d'une multiplication) en somme (résultat d'une addition)

Remarque

Développer revient à "supprimer" des parenthèses pour expliciter un calcul, très souvent ensuite on réduit le calcul en regroupant les termes portant sur les mêmes inconnues

Définition (Factoriser)

Factoriser c'est transformer une somme en produit

Remarque

Cela sera très utile par la suite pour résoudre des équations en les écrivant sous forme de produit.

1.2 Formules à connaître parfaitement

A Savoir

Soit a, b, c, d, k des nombres, on a :

- **Formule de la simple distributivité** : $k(a + b) = ka + kb$
- **Formule de la double distributivité** : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- **Première identité remarquable** : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- **Deuxième identité remarquable** : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- **Troisième identité remarquable** : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Remarque

Dans la première et la deuxième identité remarquable : $2ab$ est appelé le double produit.

On peut retrouver les trois identités remarquables à l'aide de la formule de la double distributivité néanmoins il faut les connaître dans les deux sens.

1.3 Exemples de développements

1.3.1 Utilisation en calcul mental

- 17×11
- 36×99
- $C = 101^2$
- $D = 99^2$
- 1001×999

1.3.2 Avec des lettres

- $A = 7x(x - 4)$
- $B = (2x + 1)(4x - 5)$
- $C = (4x + 3)^2$
- $D = (5x - 2)^2$
- $E = (8x + 3)(8x - 3)$
- $F = (3x + 4)^2 - 5(x - 4)$

Remarque

La page suivante est utile pour réussir ses développements

2 Rappels pour développer une expression littérale

2.1 Conventions d'écriture

- $1 \times x$ s'écrit en abrégé x
- $3 \times x$ s'écrit en abrégé $3x$
- $x \times y$ s'écrit en abrégé xy
- On peut aussi supprimer le signe \times entre deux parenthèses
- $x \times x$ s'écrit en abrégé x^2 *A ne pas confondre avec $x + x = 2x$*

2.2 Multiplications et additions littérales

Tout d'abord pour arriver à faire ce genre de calcul, il faut connaître les règles pour multiplier ou additionner deux nombres relatifs.

Pour éviter les erreurs quand on débute, le calcul se fera en trois étapes :

1. Détermination du signe du résultat (positif ou négatif)
2. Détermination du nombre devant la ou les lettres
3. Détermination de la lettre (le plus souvent en 3^{ème} : x ou x^2 ou deux lettres xy)

2.2.1 Multiplications

Exemples

1. $3x \times (-5) = -15x$
2. $(-4x) \times (-2x) = 8x^2$

A Savoir

- " - " \times " - " = " + "
- " - " \times " + " = " - "

2.2.2 Additions

A Savoir

- Quand on ajoute deux nombres négatifs le résultat est négatif et le nombre sans le signe est la somme des deux autres nombres sans le signe
- Quand on soustrait un nombre négatif avec un positif
 1. Celui qui a la plus grosse valeur sans le signe donne son signe au résultat
 2. Et on fait la soustraction du plus grand par le plus petit

Exemples

$$1. -8x - 7x = -(8 + 7)x = -15x$$

$$2. 6x^2 - 9x^2 = -(9 - 6)x^2 = -3x^2$$

Remarque

Attention ! Pour faire ce genre de calcul il faut qu'ils portent sur deux nombres qui possèdent la ou les mêmes lettres, on ne peut surtout pas faire ce genre de simplification avec $21x + 5$ ou $7x - 3x^2$

2.3 Règles de suppression des parenthèses

A Savoir

Quand on veut supprimer des parenthèses dans un calcul, on peut le faire si les parenthèses sont après le signe "+" ou "-" sans qu'aucun nombre soit entre.

- Quand on a un "+" devant, on supprime les parenthèses sans rien faire d'autre.
- Quand on a un "-" devant, on supprime les parenthèses mais on change tous les signes des opérations qui se trouvent à l'intérieur en leur opposé.

Exemples

$$\blacksquare -(5x^2 - 7x + 3) = -5x^2 + 7x - 3$$

$$\blacksquare +(15 + 3x + 8x^2) = 15 + 3x + 8x^2 = 8x^2 + 3x + 15$$

Dans le dernier calcul, on a réorganisé les nombres de la plus grande puissance de x à la plus petite

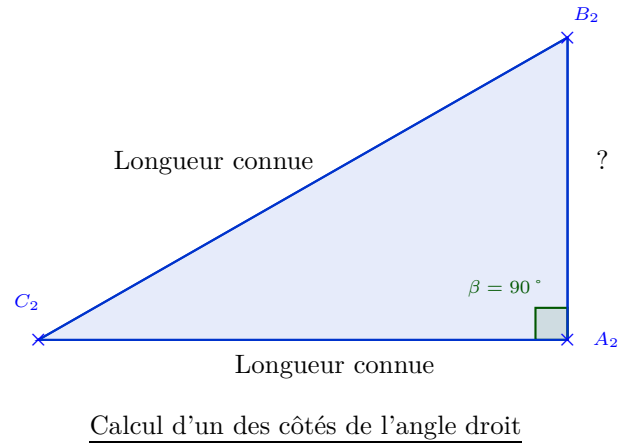
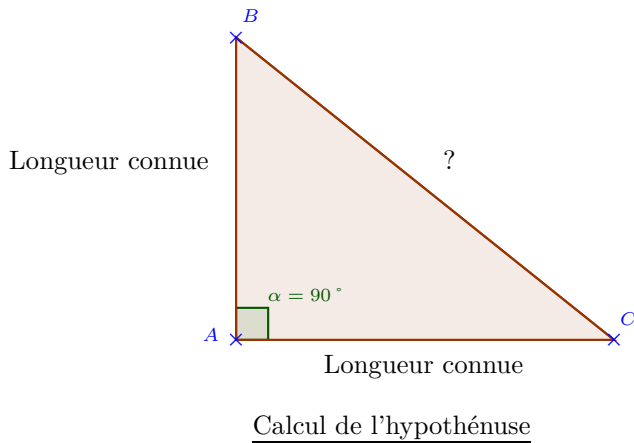
3 Rappel Théorème de Pythagore

A quoi ça sert ?

Ce théorème permet de calculer **une longueur** dans un **triangle rectangle** si on connaît **deux longueurs**

3.1 Configurations

On emploie ce théorème, soit pour calculer l'hypoténuse ou un des côtés de l'angle droit. Ces figures sont à mémoriser pour savoir quand on utilise le théorème



3.2 Enoncé du théorème

Théorème (Théorème de Pythagore)

Soit ABC un triangle rectangle en A alors on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Remarque

On dit aussi que : dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

3.3 Exemples

1. Soit DEF un triangle rectangle en D calculer DF si on sait que $DE = 5\text{cm}$ $EF = 12\text{cm}$
2. Soit IJK un triangle rectangle en K calculer une valeur approchée au mm près de JK si on sait que $IJ = 9\text{cm}$ et $IK = 7\text{cm}$

Remarque

Pour éviter des erreurs grossières quand on calcule l'hypoténuse on sait qu'on doit obtenir le côté qui a la plus grande longueur et dans le cas d'un calcul d'un côté de l'angle droit, le résultat doit être inférieur à la longueur de l'hypoténuse.

4 Fonctions : généralités

Introduction

- Si dans un épicerie, un kilogramme de tomate coûte par exemple 2€50, alors le prix des tomate est fonction de sa masse en kilogramme : à une masse correspond un prix. On verra plus tard que c'est une fonction linéaire liée à une relation de proportionnalité dont il est facile de tracer une représentation graphique.
- Dans l'activité sur le calcul de la distance à l'horizon, on a vu qu'à une hauteur en mètre correspondait une distance en kilomètre. La distance à l'horizon est fonction de la hauteur où on se trouve.
- Par contre la température de l'eau d'une journée n'est pas fonction de la température de l'air. Car à une température de l'air peut correspondre plusieurs températures différentes pour l'eau.

L'étude des fonctions est une domaine important des mathématiques car il permet prévoir et visualiser l'évolution de phénomènes dans différents domaines (physique, biologie, économie,...).

4.1 Définitions

Définition (Fonctions)

On appelle fonction f toute relation qui a une quantité de départ variable que l'on note x associe **au maximum un seule valeur à l'arrivée** $y = f(x)$.

On la note $f : x \mapsto f(x)$

Exemples

La fonction $f : x \mapsto f(x) = 3x + 4$ ou encore la fonction $g : x \mapsto g(x) = 5x^2 - 4x + 9$

Définition (Images et antécédents)

On dit que $f(x)$ est l'**image** de x par f .

Toutes les valeurs de x telles que $y = f(x)$ sont appelées **les antécédents** de y par f

Exemples

L'image de 2 par f est 10 car $f(2) = 3 \times 2 + 4 = 10$ (on remplace x par 2)

Le calcul d'antécédent est plus complexe il faut résoudre une équation , par exemple pour l'antécédent de 6 par f , il faut chercher la valeur de x telle que $3x + 4 = 6$ ici 2, cela peut devenir vite compliqué pour g par exemple.

4.2 Exemple de fonctions définies par un tableau, images et antécédents

Le tableau suivant défini une fonction car à une valeur de la première ligne correspond une seule valeur à la seconde ligne :

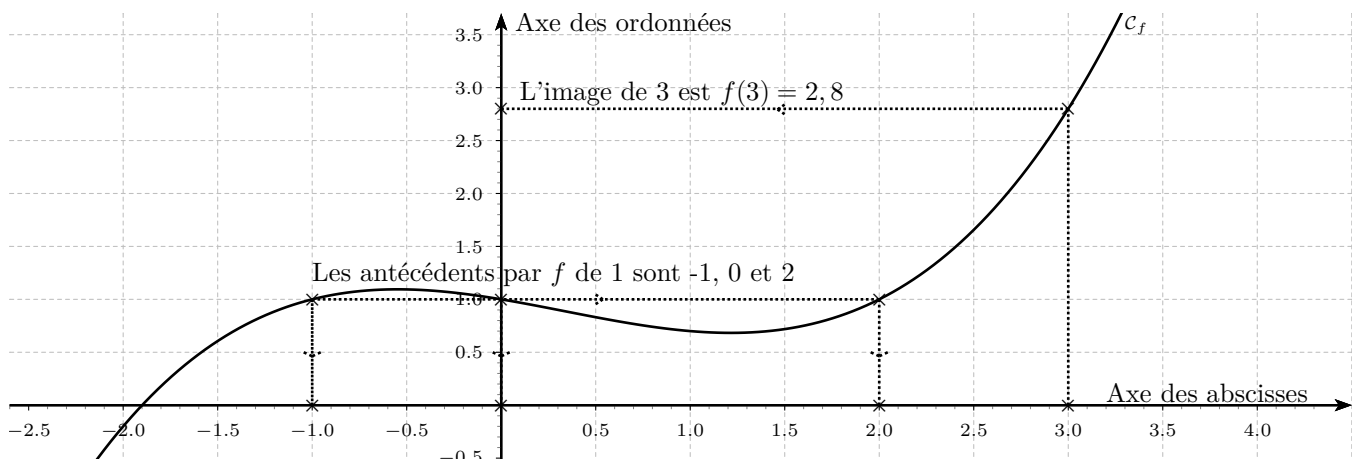
x	-4	1	2	5
$f(x)$	3	5	3	-1

L'image de 2 par f est 3 : $f(2)=3$ (c'est la valeur en dessous de 2 dans le tableau)

Les antécédents de 3 par f sont -4 et 2 (ce sont toutes les valeurs au-dessus de 3 dans le tableau)

4.3 Exemple de fonctions définies par un graphique, images et antécédents

On trace une représentation graphique d'une fonction dans un repère orthogonal, constitué de deux droites graduées perpendiculaires. A une valeur x sur l'axe des abscisses (axe horizontal) correspond une valeur $f(x)$ sur l'axe des ordonnées (axe vertical).



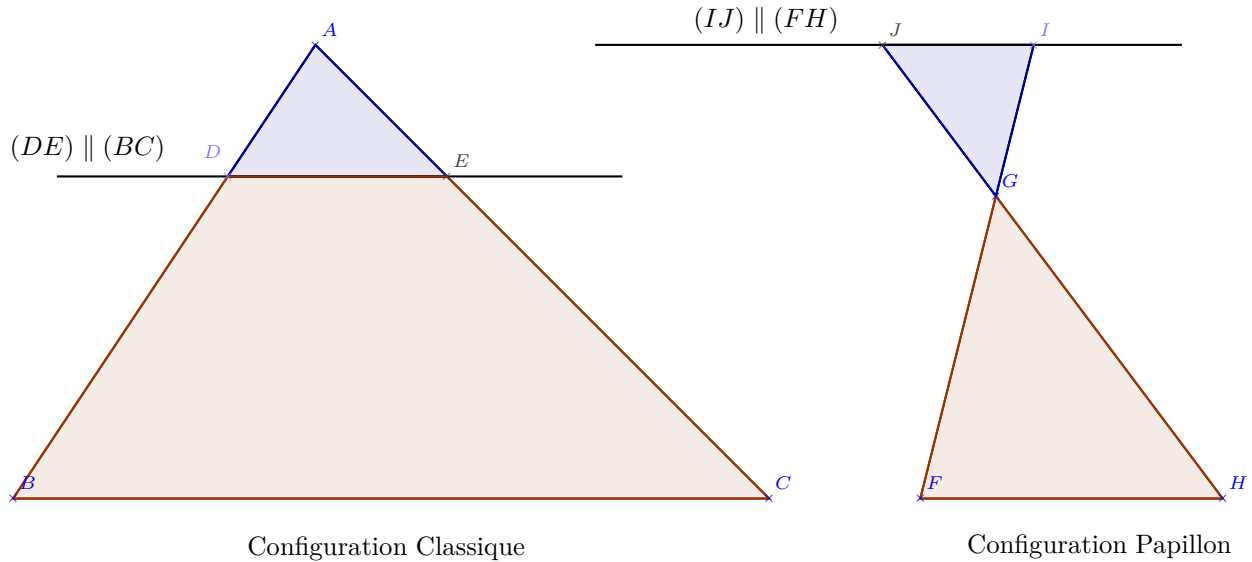
5 Théorème de Thalès

A quoi ça sert ?

Ce théorème permet de calculer **une longueur** si on connaît **trois longueurs** et que l'on a **deux droites parallèles**

5.1 Configurations

On emploie ce théorème dans deux types de configuration ces figures sont à mémoriser pour savoir quand on utilise le théorème



Remarque

"Le théorème de Thalès s'applique quand on a un petit triangle dans un grand triangle ou un petit triangle opposé à un grand triangle, les triangles doivent être de même forme (posséder les mêmes angles) "

5.2 Enoncé du théorème

Théorème (Théorème de Thalès)

Soit A,B,D trois points alignés et A,E,C alignés , si (DE) est parallèle (BC) alors on a :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Remarque

Cela revient à dire que les longueurs du petit triangle sont proportionnelles à celle du grand

5.3 Exemples

1. Dans la configuration classique calculer DE si on sait que $AD = 5\text{cm}$ $AB = 12\text{cm}$ et $BC = 9\text{cm}$
2. Dans la configuration Papillon calculer FG si on sait que $GI = 3\text{cm}$ $JG = 5\text{cm}$ $GH = 9\text{cm}$

6 Nombres Premiers

6.1 Rappels

6.1.1 Diviseurs d'un nombre

Définition

On dit qu'un nombre entier b est un diviseur du nombre entier a , si le reste de la division euclidienne de a par b est nul autrement dit : $a = b \times k$ avec k nombre entier.

Remarque

On dit aussi que a est divisible par b

Exemple

6 est un diviseur de 54 car $54 = 6 \times 9$

6.1.2 Critères de divisibilité

Règles

- Un nombre est divisible par 2 s'il se termine par 0,2,4,6,8
- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3
- Un nombre est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4
- Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5
- Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9

Exemples

- 165 est divisible par 3 et 5
- 12456 est divisible par 2,3,4 et 9

6.2 Nombres premiers

Définition

Un nombre entier strictement supérieur à 1 est premier si ses seuls diviseurs sont un et lui-même.

Exemple

23 est un nombre premier par contre 121 non car $121 = 11^2$.

6.3 Décomposition des nombres entiers

Propriété

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de nombres premiers cette décomposition est unique.

Exemple

$84 = 2 \times 42 = 2 \times 6 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $70 = 2 \times 35 = 2 \times 5 \times 7$

6.4 Fraction irréductible

Définition

Un fraction est irréductible quand les numérateurs et dénominateurs n'ont pas de diviseurs communs autres que 1.

Exemple

La fraction irréductible de $\frac{84}{70}$ est $\frac{6}{5}$ car :

$$\frac{84}{70} = \frac{2^2 \times 3 \times 7}{2 \times 5 \times 7} = \frac{6}{5}$$

7 Transformations Géométriques

7.1 Translations

Définition

La translation qui transforme A en B est définie de la façon suivante :
 C' est l'image de C par la translation de A vers B si $ABC'C$ est un parallélogramme

Remarque

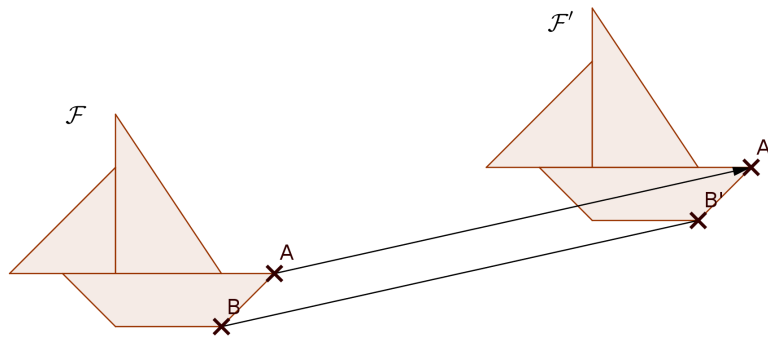
Une translation est définie alors par :

- Une direction (AB)
- Un sens de A vers B
- Une longueur AB

Propriété

Une translation conserve les longueurs, les mesures d'angles et l'aire d'une figure

Tracé du translaté d'une figure



Remarque

Si on sait qu'une figure est la translaté d'une autre, on peut à partir des propriétés de la première en déduire des propriétés sur la seconde.

Une translation fait glisser une figure dans une direction, un sens et une longueur donnés

7.2 Rotations

Définition

La rotation de centre O de sens direct et d'angle α est définie de la façon suivante :

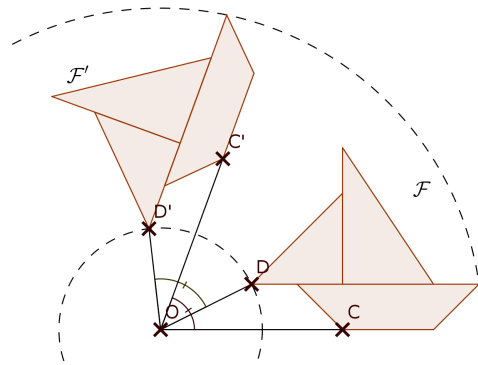
A' est l'image de A par la rotation de centre O d'angle α si $\widehat{AOA'} = \alpha$ et $OA = OA'$

Remarque

Une rotation est définie alors par :

- Un centre O
- Un sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre) ou sens indirect (sens des aiguilles d'une montre)
- Un angle α

Tracé du l'image d'une figure par une rotation



Propriété

Une rotation conserve les longueurs, les mesures d'angles et l'aire d'une figure

Remarque

Si on sait qu'une figure est l'image par une rotation d'une autre, on peut à partir des propriétés de la première en déduire des propriétés sur la seconde.

Une rotation fait tourner une figure autour d'un point selon un angle.

7.3 Homothéties

Définition

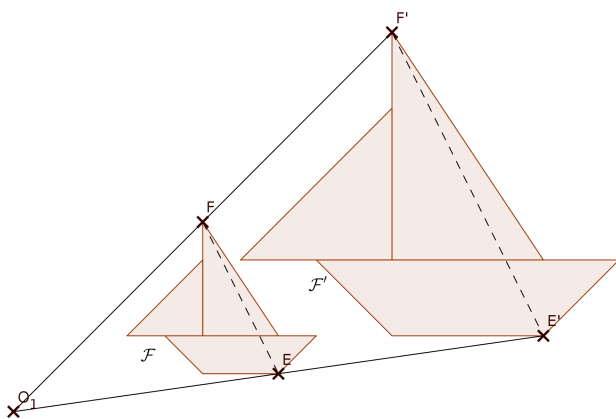
Un homothétie de centre O et de rapport k ($k \neq 0$) qui transforme le point M en M' est telle que :

1. Si $k > 0$, $OM' = k \times OM$ et $M' \in [OM)$, "M,M'" sont du même coté de O "
2. Si $k < 0$ $OM' = -k \times OM$ et $M' \notin [OM)$, "M,M'" sont de part et d'autre de O "

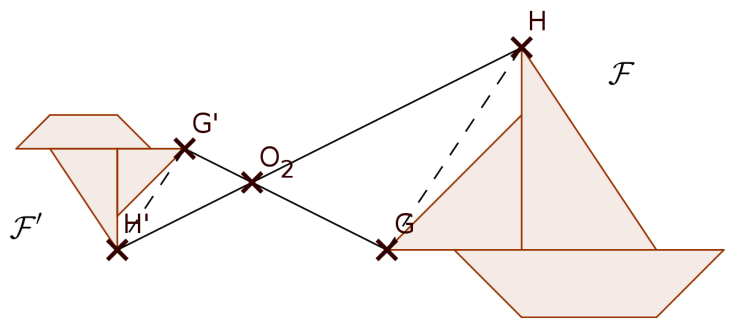
Remarque

Une homothétie est soit un agrandissement soit une réduction sauf dans deux cas particuliers si $k = -1$ c'est une symétrie centrale et si $k = 1$ l'homothétie laisse fixe tous les points.

Tracé du l'image d'une figure par une homothétie



Homothétie de centre O_1 rapport 2



Homothétie de centre O_2 rapport $-\frac{1}{2}$

Propriété

Un homothétie de rapport k conserve les mesures d'angles par contre :

- Les longueurs sont multipliés par k si $k > 0$ et $-k$ si $k < 0$
- Les aires par k^2
- Les volumes par k^3 si $k > 0$ ou par $-k^3$ si $k < 0$

8 Calcul littéral : factoriser et résoudre des équations

8.1 Factorisation

Introduction

Factoriser c'est transformer une somme en produit, cela va être très utile par pour résoudre des équations en les écrivant sous forme de produit.

A Savoir

Soit a, b, c, d, k des nombres, on a :

- **Formule de la simple distributivité** : $ka + kb = k(a + b)$
- **Première identité remarquable** : $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- **Deuxième identité remarquable** : $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- **Troisième identité remarquable** : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Quelle formule utiliser ?

La formule de la double distributivité ne sert pas à factoriser car il est trop complexe d'identifier les quatre termes.

On utilise principalement :

- La simple distributivité : repérer un nombre (lettre ou chiffre) identique de part et d'autre d'une somme ou différence.
- La troisième identité remarquable : repérer une différence de deux carrés (lettre ou chiffre)

Dans le cas ou on a la somme de trois nombres on essaye d'utiliser la première ou la deuxième identité remarquable.

A Savoir

Il faut donc connaître les carrés des premiers nombres entiers :

- | | | | | |
|-------------|--------------|--------------|----------------|----------------|
| • $1 = 1^2$ | • $16 = 4^2$ | • $49 = 7^2$ | • $100 = 10^2$ | • $169 = 13^2$ |
| • $4 = 2^2$ | • $25 = 5^2$ | • $64 = 8^2$ | • $121 = 11^2$ | |
| • $9 = 3^2$ | • $36 = 6^2$ | • $81 = 9^2$ | • $144 = 12^2$ | |

Exemple

Factoriser :

- | | | | |
|--------------------------|----------------|-------------------|------------------|
| ▪ $(x + 1)^2 - 3(x + 1)$ | ▪ $16x^2 - 36$ | ▪ $4x^2 + 4x + 1$ | ▪ $x^2 - 6x + 9$ |
|--------------------------|----------------|-------------------|------------------|

8.2 Equations

Définition

Une équation est une égalité ou figure une ou plusieurs inconnues.

Résoudre une équation à une inconnue x c'est trouver la ou les valeurs de x pour la ou lesquelles l'égalité est vérifié.

Propriété (Equations du premier degré)

Une équation du premier degré est de la forme $ax + b = 0$, si $a \neq 0$ elle admet une unique solution $x = -\frac{b}{a}$

Exemple

Résoudre $6x + 5 = 3x + 7$

8.2.1 Equations produits

Propriété

$A \times B = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$

Exemple

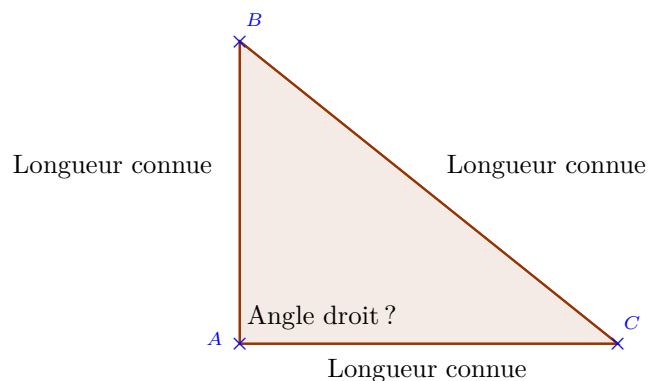
Résoudre $16x^2 = 36$

9 Rappel Réciproque du Théorème de Pythagore

A quoi ça sert ?

Ce théorème permet de savoir si un triangle est rectangle si on connaît **trois longueurs**

9.1 Configuration



9.2 Enoncé du théorème

Théorème (réciproque de Pythagore)

Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors ABC est un triangle rectangle en A

Remarque

Par rapport au théorème de Pythagore, on remarque que l'hypothèse et la conclusion ont été permuté, c'est la raison pour laquelle on l'appelle la réciproque du théorème de Pythagore.

9.3 Exemples

1. Le triangle EDF tel que $DE = 6cm$ $EF = 8cm$ et $DF = 10cm$ est-il rectangle ?
2. Le triangle RST tel que $RS = 9cm$ $ST = 12cm$ et $RT = 11cm$ est-il rectangle ?

Remarque

Il est très important de calculer séparément Le coté de plus grande longueur au carré et la somme des longueurs deux autres côtes du triangle. Car on ne s'est pas s'il y égalité entre ces deux quantités.

S'il n'y pas égalité pour conclure que l'angle n'est pas droit on utilise plutôt la contraposé du théorème de Pythagore (la négation de ce théorème).

10 Trigonométrie

A quoi ça sert ?

La trigonométrie permet de calculer dans **un triangle rectangle** :

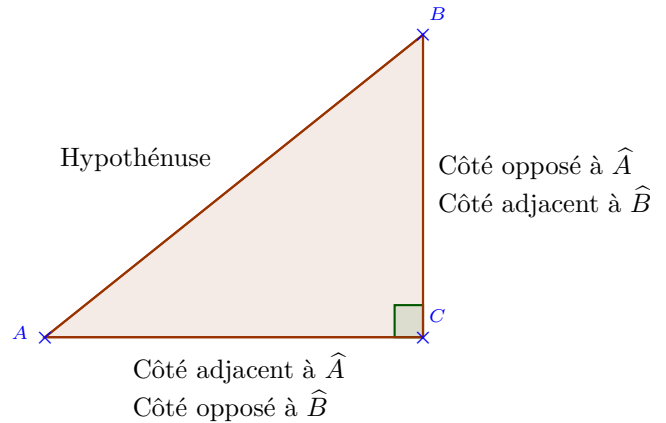
- **Un angle** si on connaît **deux longueurs** du triangle rectangle
- **Une longueur** si on connaît **une longueur et un angle** du triangle rectangle

10.1 Formules à connaître parfaitement

Définition

Le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu sont des quotients de longueurs définis ainsi :

1. $\cos(\hat{A}) = \frac{\text{Côté adjacent à } \hat{A}}{\text{Hypothénuse}} = \frac{AC}{AB}$
2. $\sin(\hat{A}) = \frac{\text{Côté opposé à } \hat{A}}{\text{Hypothénuse}} = \frac{BC}{AB}$
3. $\tan(\hat{A}) = \frac{\text{Côté opposé à } \hat{A}}{\text{Côté adjacent à } \hat{A}} = \frac{BC}{AC}$



Remarques

- Le côté adjacent d'un angle aigu est le côté "voisin" de l'angle qui n'est pas l'hypothénuse. Le côté opposé est le côté "en face" de l'angle aigu.
- le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont toujours des nombres compris entre 0 et 1
- il existe un moyen mnémotechnique de retenir ces 3 formules : "**CAH SOH TOA**"

Exemple

Ecrire les rapports correspondants au cosinus, sinus et tangente de l'angle \hat{B}

10.2 Utilisation de la calculatrice

Avant d'utiliser les touches trigonométriques de la calculatrice, il faut s'assurer que la calculatrice est en mode degré. Un symbole (D ou deg) doit apparaître en haut de l'écran .

- Pour calculer une longueur, il suffit d'utiliser directement les touches cos, sin et tan.
- Pour calculer un angle, il faut taper la touche jaune (seconde ou shift) avant de taper sur cos, sin, tangente

Exemples

Calculer la longueur $5\text{cm} \times \cos(36^\circ)$ et l'angle \hat{C} tel que $\sin(\hat{C}) = 0.78$, valeur approché au mm pour la longueur et à l'unité pour l'angle.

10.3 Calculs d'angles dans un triangle rectangle

Il faut pour cela connaître **deux longueurs** du triangle rectangle.

Soit on fait un croquis un croquis ou on marque les longueurs connues sur la figure, ainsi on peut trouver laquelle des trois formules il faut utiliser. La valeur de l'angle est ensuite donné par la calculatrice.

Exemples

1. Dans un triangle IJK rectangle en I tel que IJ=6cm et JK=8cm, calculer \hat{J} , arrondir à l'unité
2. Dans un triangle RST rectangle en T tel que RT=5cm et ST=9cm, calculer \hat{S} , arrondir à l'unité

10.4 Calculs de longueurs dans un triangle rectangle

Il faut pour cela connaître **une longueur** et un **un angle** du triangle rectangle.

On fait comme précédemment pour trouver la bonne formule à utiliser. On remplace dans la formule la longueur et l'angle que l'on connaît et tout comme pour le théorème de Thalès, on calcule la longueur manquante en utilisant ses connaissances en proportionnalité.

Exemples

1. Dans un triangle CDE rectangle en D tel que CE=6cm et $\hat{C} = 40^\circ$, calculer CD, arrondir au mm
2. Dans un triangle MNO rectangle en O tel que OM=8cm et $\hat{N} = 75^\circ$, calculer ON