1.Suites : génération, croissance et limites

Définition
Une suite numérique u est une fonction qui à tout entier naturel n associe un nombre réel $u(n)$: $u : n \in \mathbb{N} \longmapsto u(n)$
$u(n)$ **est appelé le terme de rang** n. Il et noté u_n
On note cette suite soit u, soit (u_n)

Exemple
La suite (u_n) des nombre entiers naturels impairs $u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 5, u_3 = 7 \ldots$

Remarque
Parfois, on définit la suite (u_n) à partir d'un certain rang n_0 c'est à dire pour $n \geq n_0$ par exemple la suite $(\frac{1}{n})$ est définie pour $n \geq 1$.

1 Mode de génération d'un suite

1.1 Suite définie par une formule explicite $u_n = f(n)$

Définition
Un suite est définie par **une formule explicite** lorsque u_n, s'exprime en fonction de l'entier n.
Dans ce cas, on peut calculer chaque terme u_n directement à partir de son rang n.

Exemples
La suite des entiers naturels impairs peut s'écrire $u_n = 2n + 1$ ici $f(x) = 2x + 1$.
Si on prend $f : x \longmapsto x^2$, la suite u a pour terme général $u_n = n^2$, $u_{11} = 11^2 = 121$.

1.2 Suite définie par une relation de recurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition
Une suite est définie **par une relation de récurrence**, lorsqu'elle est définie par :

- La donnée de son premier terme : u_0.
- Une relation qui permet de calculer chaque terme à partir du précédent.

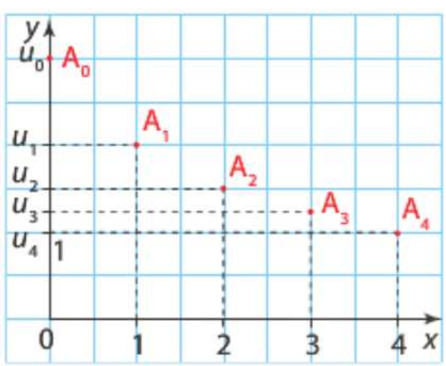
Dans ce cas, pour calculer chaque terme u_n, il faut avoir calculé tous les termes qui précèdent.

Exemples
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2 \times u_n - 3$.
On a $u_1 = 2 \times u_0 - 3 = 2 \times 1 - 3 = -1$ ensuite $u_2 = 2 \times u_1 - 3 = 2 \times (-1) - 3 = -5 \ldots$

2 Représentation graphique

La représentation graphique dans un repère des termes d'une suite est l'ensemble des points isolés de coordonnées $(0,u_0)$, $(1,u_1)$, $(2,u_2)$, $(3,u_3)$, ..., (n,u_n)

On considère la suite (un) définie pour tout entier naturel définie par : $u_n = \dfrac{6}{n+2}$
On a $u_0 = 3$, $u_1 = 2$, $u_2 = \dfrac{3}{2}$, $u_3 = \dfrac{6}{5}$ et $u_4 = 1$
Les points $A_0(0;3)$, $A_1(1;2)$, $A_2(2;\dfrac{3}{2})$, $A_3(3;\dfrac{6}{5})$ et $A_4(4;1)$ sont les cinq premiers points de la représentation graphique de cette suite.



3 Sens de variation d'une suite

Définition
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, on dit que la suite (u_n) est

- **croissante** à partir du rang n_0, si pour tout entier $n \geq n_0$ on a $u_{n+1} \geq u_n$
- **décroissante** à partir du rang n_0, si pour tout entier $n \geq n_0$ on a $u_{n+1} \leq u_n$
- **constante** à partir du rang n_0, , si pour tout entier $n \geq n_0$ on a $u_{n+1} = u_n$

Remarques

- Comme pour les fonctions si l'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes on parle alors de suite, strictement croissante, strictement décroissante.
- Un suite peut être ni croissante ni décroissante : $(-1)^n$

Méthode
Pour étudier le sens de variation de (u_n), on a trois techniques à notre disposition :

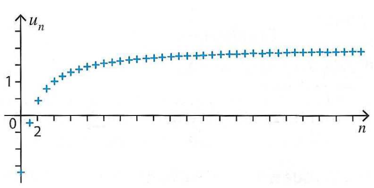
1. On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$, si ce signe est strictement positif (resp. strictement négatif), la suite est strictement croissante (resp. décroissante)
2. Soit f une fonction définie et croissante (resp. décroissante) sur $[p; +\infty[$ avec p entier positif et telle que $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors la suite (u_n) est croissante (resp. décroisssante) à partir du rang p.
3. Si la suite (u_n) est strictement positive on compare la fraction $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si le résultat est supérieur (resp. inférieur) à 1, la suite est croissante (resp. décroissante)

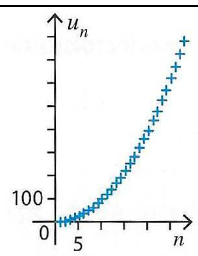
Exemples

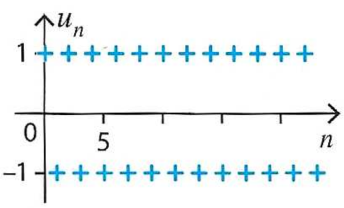
1. La suite des nombre entiers impairs est strictement croissante car :
$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 1 - (2n+1) = 2n + 3 - 2n - 1 = 2 > 0$
2. La suite $(\dfrac{1}{n})$ est décroissante à partir du rang 1 car la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[1; +\infty[$
3. La suite (3^n) est strictement croissante car $\dfrac{3^{n+1}}{3^n} = 3 > 1$

4 Notion de limite d'une suite

S'intéresser à la limite d'une suite (u_n) c'est étudier le comportement de la suite quand on donne des valeurs de n aussi grande que l'on veut, on dit aussi quand n tend vers l'infini.
Cette année on utilisera différents outils (python, calculatrice) pour faire des conjectures sur cette limite à partir de graphiques ou de tableaux.

<table>
<tr><th>Limite finie</th><th>Limite Infinie</th><th>Pas de Limite</th></tr>
<tr>
<td>


$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$
</td>
<td>


$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>n</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td></tr>
<tr><td>v_n</td><td>0.1</td><td>-0.091</td><td>0.0833</td><td>-0.077</td></tr>
</table>

$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$
</td>
<td>
<table>
<tr><td>n</td><td>0</td><td>10</td><td>100</td><td>1000</td></tr>
<tr><td>v_n</td><td>16</td><td>-4</td><td>-184</td><td>-19984</td></tr>
</table>

$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$
</td>
<td>
<table>
<tr><td>n</td><td>50</td><td>51</td><td>52</td><td>53</td></tr>
<tr><td>v_n</td><td>2500</td><td>-2601</td><td>2704</td><td>-2809</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>