Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie d'Aix-Marseille

Mercredi 09 mars 2022

Les calculatrices sont autorisées selon la règlementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercices académiques

Cette sous-épreuve comporte deux exercices, à traiter dans le temps imparti.

Les binômes composés de candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité doivent traiter les exercices 1 et 2.

Les autres binômes doivent traiter les exercices 1 et 3.

Pour chaque binôme une seule copie est à rendre, avec le nom des deux élèves ayant composé.

Durée de la composition : 2 heures

Ce sujet comporte sept pages dont celle-ci.

Exercice n°1 opérations et géométrie tropicales (pour tous)

Définitions: soient a et b deux nombres réels.

- On appelle « addition tropicale » de a et b le minimum des deux nombres a et b c'est à dire le plus petit des deux nombres a et b et on note a $\oplus$b= min(a; b).
- On appelle « multiplication tropicale » de a et b la somme dans $\mathbb{R}$ de a et b et on note a$\otimes$ b= $a + b$.

Définitions :

- On dira qu'une opération d'un ensemble E notée $*$ est commutative si $a * b = b * a$ pour tous les éléments de E. Ainsi, l'addition dans $\mathbb{R}$ est commutative car $a + b = b + a$.
- On dira qu'une opération d'un ensemble E notée $*$ est associative si $(a * b) * c = a * (b * c)$ pour tous éléments de E. Ainsi, l'addition dans $\mathbb{R}$ est associative car $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- On dira qu'un élément e d'un ensemble E est un élément neutre pour l'opération $*$ si, pour tous les éléments x de E, on a $e * x = x * e = x$.

PARTIE 1 Opérations tropicales et propriétés

1. Quelques calculs

a. Calculer 3 $\oplus$2, 2 $\oplus$(-5) et $\frac{3}{2} \oplus \frac{2}{3}$.

b. Calculer 3$\otimes$5, 3$\otimes$(-5), $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{5}$.

2. Propriétés de $\oplus$ et $\otimes$

a. Montrer que l'addition tropicale est commutative.

b. Montrer que l'addition tropicale est associative.

c. Montrer que la multiplication tropicale est distributive par rapport à l'addition c'est-à-dire que $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ pour tous réels a, b et c.

d. Quel est l'élément neutre pour la multiplication tropicale ?

e. Existe-t-il un élément neutre pour l'addition tropicale ? Pourrait-on définir une soustraction tropicale ?

3. Puissances tropicales

On précise que pour tout nombre réel a, le nombre $a^{"2"}$ est le carré tropical de a, c'est à dire $a \otimes a$. L'opération × est l'opération « multiplié » usuelle des réels.

a. En utilisant les propriétés de $\otimes$, calculer $3^{"2"}$ et $(-2)^{"3"}$.

b. Calculer la quantité $a^{"2"} \oplus 1 \oplus (2 \times a)$.

c. Pour tout entier naturel n et pour tout a réel, donner une autre écriture de $a^{"n"}$.

d. Montrer que pour tous réels a, b et pour tout entier naturel n $(a \oplus b)^{"n"} = n \times \min(a; b)$ et en déduire que :

$$(a \oplus b)^{"n"} = a^{"n"} \oplus b^{"n"}$$

4. Équations

Résoudre avec les opérations tropicales les deux équations $3 \oplus x = x$ et $x^{"2"} = -1$.

PARTIE II Géométrie tropicale

1. Fonctions linéaires et affines tropicales et droites tropicales

   a. Donner l'expression générale, avec les opérations usuelles dans $\mathbb{R}$ d'une fonction linéaire tropicale dont l'expression est $f(x) = a \otimes x$ pour tout réel a.

   b. Représenter graphiquement la droite tropicale d'équation $y = 2 \otimes x$.

   c. Donner l'expression générale, avec les opérations usuelles dans $\mathbb{R}$ d'une fonction affine tropicale dont l'expression est $g(x) = (a \otimes x) \oplus b$ por tous réels a et b.

   d. Représenter graphiquement la droite tropicale d'équation $y = (2 \otimes x) \oplus 3$.

2. Fonction polynôme tropical

   a. Donner l'expression, avec les opérations usuelles dans $\mathbb{R}$ d'une fonction polynôme tropical du second degré dont l'expression est,

   $$h(x) = (a \otimes x^{\text{»}2\text{»}}) \oplus (b \otimes x) \oplus c.$$ avec a, b et c trois réels.

   b. Représenter graphiquement la fonction polynôme tropical $f(x) = (2 \otimes x^{"2"}) \oplus (1 \otimes x) \oplus 1$

3. Points et droites tropicales

   a. On considère la droite tropicale d'équation $y = (3 \otimes x) \oplus 5$. Les points A de coordonnées (2 ;11) et B de coordonnées (2 ;5) appartiennent-ils à cette droite ?

   b. On considère les points A (2 ;1) et B (-2 ;-1). Existe-t-il une droite tropicale passant par les points A et B ? Si oui donner une équation de cette droite.

   c. Montrer qu'il n'existe pas de droite tropicale passant par les points A(2 ;1) et B(3 ;6).

   d. Si on considère un point A fixé, déterminer la zone dans laquelle doit se trouver B pour que la droite tropicale existe et soit unique.

Exercice 2 **Mélanger des cartes** **(pour les élèves de 1ière générale ayant choisi la spécialité mathématiques)**

Mélanger des cartes n'est pas si facile. Il est important que l'état du paquet après un mélange soit imprévisible, sinon des tricheurs pourraient en tirer parti. On appellera « mélange » une succession d'opérations visant à changer l'ordre des cartes, et « état du paquet » le résultat d'un mélange.

On dit qu'une méthode de mélange est équiprobable si tous les états du paquet en appliquant cette méthode ont les mêmes chances de sortir.

Partie 1 – Un algorithme de mélange

Les ordinateurs sont de bons partenaires de jeux de cartes, ils doivent donc savoir mélanger. Dans cette partie vous analyserez un algorithme de mélange de cartes pour déterminer s'il est équiprobable ou non.

1. Dénombrement

a. Combien y a-t-il de façons différentes de ranger un jeu de deux cartes A et B?

b. Même question avec un jeu de trois cartes A, B et C.

c. Justifier qu'un jeu de n cartes peut se ranger de $n!$ manières différentes, où $n!$ désigne la factorielle de l'entier naturel n et $n! = 1 \times 2 \times \ldots\ldots \times n$.

2 Analyse d'un algorithme

Voici un algorithme, écrit en pseudo-code qui traduit un mélange d'un jeu de N cartes :

```
Pour i allant de 1 à N
    j est un entier aléatoire entre 1 et N
    échanger les cartes numéro i et j
Fin pour
```

a. On considère un jeu de deux cartes « AB ». En parcourant toutes les valeurs possibles de la variable j, énumérer tous états du paquet que peut produire cet algorithme. Cet algorithme est-il équiprobable pour un jeu de deux cartes ?

b. On considère maintenant un jeu de trois cartes « ABC ». Donner l'état du paquet si la variable j prend successivement les valeurs 2, 1, 2 : on dira qu'on a effectué l'opération de mélange 2-1-2. Même question pour l'opération de mélange 3-1-1.

c. Un ordinateur a fait tourner 10 000 fois cet algorithme. On reporte dans le tableau ci-dessous le nombre de fois où les mélanges ont donné les différents états du paquet.

ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
1473	1894	1845	1837	1503	1448

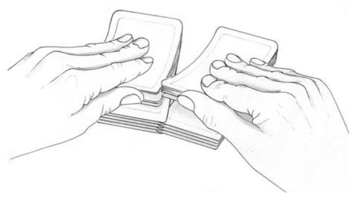
Quelle conjecture pouvez-vous faire sur les probabilités d'obtenir chaque état du paquet ?
Cet algorithme vous paraît-il équiprobable ?

d. Prouver que cet algorithme peut effectuer n^n mélanges différents pour un jeu de n cartes.

e. Prouver que si $n > 2$, alors $n!$ ne divise pas n^n . En déduire que l'algorithme n'est pas équiprobable.
Indication: on pourra démontrer que n et $n-1$ sont premiers entre eux.

Partie 2 – Le mélange américain parfait

Cette stratégie de mélange est la préférée des magiciens et des tricheurs. On a un nombre pair de cartes. On le divise en deux paquets de même taille. Puis on alterne une carte d'un paquet, puis une carte de l'autre, etc.



Exemple : avec huit cartes ABCDEFGH, les deux paquets sont donc ABCD et EFGH.
Il y a deux manières de procéder :

- mélange « extérieur » : on prend une carte du premier paquet, puis du deuxième et on continue, ce qui donne : AEBFCGDH.
- mélange « intérieur » : on prend une carte du deuxième paquet, puis du premier, et on continue, ce qui donne : EAFBGCHD.

1. Les mélanges extérieurs

a. Combien de mélanges extérieurs faut-il effectuer pour qu'un jeu de quatre cartes ABCD retrouve sa configuration de départ ?

b. On choisit n pair et on numérote les cartes de 0 à $n-1$.
Montrer qu'après un mélange extérieur, la carte numéro i se retrouve en position $f(i)$ où $f(i)$ est le reste de la division de $2i$ par $n-1$, sauf si $i = n-1$ auquel cas $f(n-1) = n-1$.
Il sera utile de distinguer les deux cas possibles : la carte numéro i se trouve dans la première moitié du paquet, ou dans la deuxième.

c. On admet que, si on enchaîne k mélanges de ce type, la carte numéro i se retrouve en position : reste de la division de $i \times 2^k$ par $n-1$, sauf la carte numéro $n-1$ qui reste à la même place. En déduire le nombre de mélanges extérieurs qu'il faut faire pour qu'un jeu de cinquante-deux cartes retrouve sa configuration de départ.

2. Les mélanges intérieurs

Prouver que si les cartes sont numérotées de 0 à $n-1$, n étant pair, alors après un mélange intérieur, la carte numéro i se retrouve en position $g(i)$ où $g(i)$ est le reste de la division de $2i+1$ par $n+1$.

3. Successions de mélanges intérieurs et extérieurs

Un tricheur ou un magicien veut amener la carte du sommet (carte de position 0) à une position i décidée à l'avance.
Le mathématicien et magicien Alex Emsley a ainsi trouvé la méthode suivante :
si on décompose la position i en base 2 et qu'on applique alors un mélange intérieur pour chaque 1 et un mélange extérieur pour chaque 0 alors on amène la carte du sommet en position i.
Par exemple si $i = 5$, on décompose 5 ainsi, $5 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ on obtient en base 2 : 101. Pour amener la carte au sommet en position 5 on applique un mélange intérieur puis un mélange extérieur puis un mélange intérieur.

a. Vérifier sur un jeu de huit cartes que cette succession intérieur/extérieur/intérieur amène bien la carte du sommet en position 5 (vous donnerez tous les mélanges successifs).

b. Quelle succession de mélanges faut-il appliquer pour amener la carte du sommet d'un jeu de cinquante-deux cartes en bas du paquet, c'est-à-dire en position 51 ?

Exercice 3 Mélanger des cartes (élèves de classes technologiques ou n'ayant pas suivi la spécialité mathématiques)

Mélanger des cartes n'est pas si facile. Il est important que l'état du paquet après un mélange soit imprévisible, sinon des tricheurs pourraient en tirer parti. On appellera « mélange » une succession d'opérations visant à changer l'ordre des cartes, et « état du paquet » le résultat d'un mélange.

On dit qu'une méthode de mélange est équiprobable si tous les états du paquet en appliquant cette méthode ont les mêmes chances de sortir.

Partie 1 – Un algorithme de mélange

Les ordinateurs sont de bons partenaires de jeux de cartes, ils doivent donc savoir mélanger. Dans cette partie vous analyserez un algorithme de mélange de cartes pour déterminer s'il est équiprobable ou non.

1. Dénombrement

a. Combien y a-t-il de façons différentes de ranger un jeu de deux cartes A et B?

b. Même question avec un jeu de trois cartes A, B et C.

c. $n!$ désigne la factorielle de l'entier naturel n et $n! = 1 \times 2 \times \ldots\ldots \times n$. Calculer $3!$ et $10!$.
On admet qu'un jeu de n cartes peut se ranger de $n!$ manières différentes.

d. Montrer que $pour\ n > 2, n!$ ne peut pas être un nombre premier.

e. Voici un algorithme, écrit en pseudo-code qui traduit un mélange d'un jeu de N cartes :

```
Pour i allant de 1 à N
    j est un entier aléatoire entre 1 et N
    échanger les cartes numéro i et j
Fin pour
```

f. On considère un jeu de deux cartes « AB ». En parcourant toutes les valeurs possibles de la variable j, énumérer tous états du paquet que peut produire cet algorithme. Cet algorithme est-il équiprobable pour un jeu de deux cartes ?

g. On considère maintenant un jeu de trois cartes « ABC ».
Donner l'état du paquet si la variable j prend successivement les valeurs 2, 1, 2 : on dira qu'on a effectué l'opération de mélange 2-1-2. Même question pour l'opération de mélange 3-1-1.

h. Un ordinateur a fait tourner 10 000 fois cet algorithme. On reporte dans le tableau ci-dessous le nombre de fois où les mélanges ont donné les différents états du paquet.

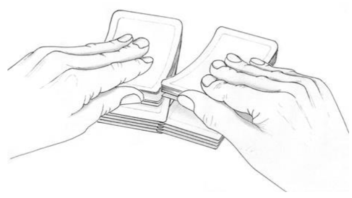
ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
1473	1894	1845	1837	1503	1448

Quelle conjecture pouvez-vous faire sur les probabilités d'obtenir chaque état du paquet ?
Cet algorithme vous paraît-il équiprobable ?

i. Prouver que cet algorithme peut effectuer n^n mélanges différents pour un jeu de n cartes.

j. Prouver que si $n > 2$, alors $n!$ ne divise pas n^n . En déduire que l'algorithme n'est pas équiprobable.
Indication : on pourra démontrer que n et $n - 1$ sont premiers entre eux.

Partie 2 – Le mélange américain parfait



Cette stratégie de mélange est la préférée des magiciens et des tricheurs. On a un nombre pair de cartes. On le divise en deux paquets de même taille. Puis on alterne une carte d'un paquet, puis une carte de l'autre, etc.
Exemple : avec huit cartes ABCDEFGH, les deux paquets sont donc ABCD et EFGH.
Il y a deux manières de procéder :

- mélange « extérieur » : on prend une carte du premier paquet, puis du deuxième et on continue, ce qui donne : AEBFCGDH.
- mélange « intérieur » : on prend une carte du deuxième paquet, puis du premier, et on continue, ce qui donne : EAFBGCHD.

1. Les mélanges extérieurs

a. Combien de mélanges extérieurs faut-il effectuer pour qu'un jeu de quatre cartes ABCD retrouve sa configuration de départ ?

b. On admet que, si on enchaîne k mélanges de ce type, la carte numéro i se retrouve en position : reste de la division de $i \times 2^k$ par $n-1$, sauf la carte numéro $n-1$ qui reste à la même place. En déduire le nombre de mélanges extérieurs qu'il faut faire pour qu'un jeu de cinquante-deux cartes retrouve sa configuration de départ.

2. Successions de mélanges intérieurs et extérieurs

Un tricheur ou un magicien veut amener la carte du sommet (carte de position 0) à une position i décidée à l'avance.
Le mathématicien et magicien Alex Emsley a ainsi trouvé la méthode suivante :
si on décompose la position i en base 2 et qu'on applique alors un mélange intérieur pour chaque 1 et un mélange extérieur pour chaque 0 alors on amène la carte du sommet en position i.
Par exemple si $i = 5$, on décompose 5 ainsi, $5 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ on obtient en base 2 : 101. Pour amener la carte au sommet en position 5, on applique un mélange intérieur puis un mélange extérieur puis un mélange intérieur.

a. Décomposer 19 en base 2.

b. Vérifier sur un jeu de huit cartes que cette succession intérieur/extérieur/intérieur amène bien la carte du sommet en position 5 (vous donnerez tous les mélanges successifs).

c. Quelle succession de mélanges faut-il appliquer pour amener la carte du sommet d'un jeu de cinquante-deux cartes en bas du paquet, c'est-à-dire en position 51 ?