

Nouilles de Buffon et applications

S. Simao

14 mars 2023

Qui est Buffon ?

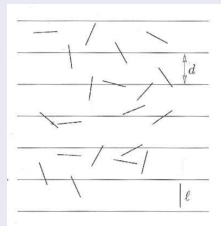


Georges-François Leclerc dit Comte de Buffon (1707 -1788)

Le problème historique

1733 : Buffon

On lance une aiguille de longueur ℓ sur un parquet dont les lames ont pour largeur d avec $\ell \leq d$.

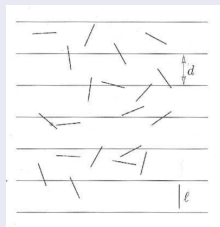


Alors la probabilité que l'aiguille tombe à cheval sur deux lames est :

Le problème historique

1733 : Buffon

On lance une aiguille de longueur ℓ sur un parquet dont les lames ont pour largeur d avec $\ell \leq d$.



Alors la probabilité que l'aiguille tombe à cheval sur deux lames est :

$$p = \frac{2\ell}{\pi d}$$

La démonstration : 1) généralisation

130 ans plus tard, la démonstration de Barbier, départ

On considère maintenant des aiguilles de taille quelconque.

On va s'intéresser à la fonction m qui à une longueur d'aiguille associe le nombre moyen d'intersection(s) de l'aiguille avec le parquet.

La démonstration : 2) Aiguille coloriée

Ici c'est Marseille, bébé !

On colorie les aiguilles en bleu et blanc, bleu sur une longueur ℓ_1 et blanc sur un longueur ℓ_2 avec $\ell = \ell_1 + \ell_2$ alors on a :

$$m(\ell) =$$

La démonstration : 2) Aiguille coloriée

Ici c'est Marseille, bébé !

On colorie les aiguilles en bleu et blanc, bleu sur une longueur ℓ_1 et blanc sur un longueur ℓ_2 avec $\ell = \ell_1 + \ell_2$ alors on a :

$$m(\ell) = m(\ell_1) + m(\ell_2)$$

La démonstration : 3) Equation fonctionnelle

Propriété

Toute fonction continue $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout x et y , $m(x + y) = m(x) + m(y)$ est une fonction linéaire.

Autrement dit : pour tout $x \in \mathbb{R} : m(x) = a \times x$

La démonstration : 3) Equation fonctionnelle

Propriété

Toute fonction continue $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout x et y , $m(x + y) = m(x) + m(y)$ est une fonction linéaire.

Autrement dit : pour tout $x \in \mathbb{R} : m(x) = a \times x$

Nouveau but

Trouver la valeur de a et pour cela on va changer la forme des aiguilles.

La démonstration : 4) De "needle" à "noodle"

Un peu d'anglais

La démonstration : 4) De "needle" à "noodle"

Un peu d'anglais

Needle → Aiguille

Noodle → Nouille

Métamorphose !

La démonstration : 4) De "needle" à "noodle"

Un peu d'anglais

Needle → Aiguille

Noodle → Nouille

Métamorphose !

- Passage à une aiguille polygonale
- Passage à une nouille

La démonstration : 5) Apparition de π

Finish him !

Quelle courbe a une longueur liée à π ?

La démonstration : 5) Apparition de π

Finish him !

Quelle courbe a une longueur liée à π ? Le cercle !

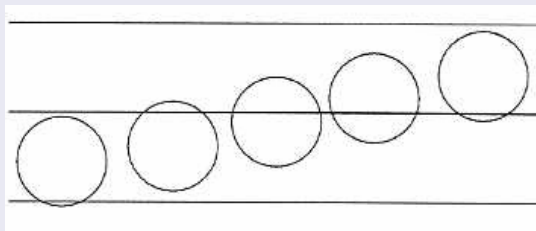
Quelle est la valeur du diamètre du cercle qui donne la valeur de $m(\ell)$ instantanément ?

La démonstration : 5) Apparition de π

Finish him !

Quelle courbe a une longueur liée à π ? Le cercle !

Quelle est la valeur du diamètre du cercle qui donne la valeur de $m(\ell)$ instantanément ?

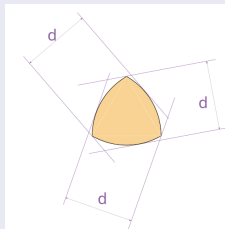


Conclusion ?

Application 1 : Théorème de Barbier

Théorème 1860

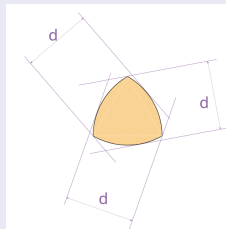
Le périmètre d'une courbe fermée de largeur constante ne dépend pas de sa forme : précisément, toute courbe fermée de largeur constante d a pour périmètre πd .



Application 1 : Théorème de Barbier

Théorème 1860

Le périmètre d'une courbe fermée de largeur constante ne dépend pas de sa forme : précisément, toute courbe fermée de largeur constante d a pour périmètre πd .



Une idée de la démonstration ?

Estimer π ?

- Isoler π dans la formule de Buffon
- Une idée importante des probabilités : répéter une expérience aléatoire un grand nombre de fois et regarder la fréquence d'apparition d'un événement aléatoire permet d'approximer la probabilité d'apparition de ce phénomène.

A vous de jouer !

Avec un feuille A3 des droites et des allumettes.

Votre approximation $\pi \approx$

Fatigués de compter ?

Fatigués de compter ?

Passez à la programmation !

Fatigués de compter ?

Passez à la programmation !

Un site génial qui va nous faire gagner du temps.

Calcul de π de Lazzarini : Fake news ?

1901

Avec sa "machine" fabriquée pour faire tomber les bâtons, il a trouvé

$$\pi = 2 \times \frac{5 \times 3408}{6 \times 1808} \approx 3,145929$$

Qu'en pensez-vous, est ce possible ou probable ?

Indications

$\frac{355}{113}$ est une valeur connue de π depuis l'antiquité.

Calcul de π de Lazzarini : Fake news ?

1901

Avec sa "machine" fabriquée pour faire tomber les bâtons, il a trouvé

$$\pi = 2 \times \frac{5 \times 3408}{6 \times 1808} \approx 3,145929$$

Qu'en pensez-vous, est ce possible ou probable ?

Indications

$\frac{355}{113}$ est une valeur connue de π depuis l'antiquité.

Formule des intervalles de confiance à 95% :

$$p \in \left[f - 1,96 \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}; f + 1,96 \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$$

Calcul de π : méthodes plus performantes

Formule BBP, 1995

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

Calcul de π : méthodes plus performantes

Formule BBP, 1995

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

2700 milliards de décimale de π , F. Bellard 2010

Série de Chudnosky :

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)! (A + Bn)}{(n!)^3 (3n)! C^{3n+3/2}}$$

Avec $A = 13591409$ $B = 545140134$ $C = 640320$

- *Deux théorèmes et des grenouilles*, A. GAUDILLIÈRE
Conférences 2/3 2022

- *Deux théorèmes et des grenouilles*, A. GAUDILLIÈRE
Conférences 2/3 2022
- *Raisonnements divins*, MARTIN AIGNER - GUNTER M
ZIEGLER

- *Deux théorèmes et des grenouilles*, A. GAUDILLIÈRE
Conférences 2/3 2022
- *Raisonnements divins*, MARTIN AIGNER - GUNTER M
ZIEGLER
- *Les sorcières de Salem*, site web du labo de maths Raphaël Salem

- *Deux théorèmes et des grenouilles*, A. GAUDILLIÈRE
Conférences 2/3 2022
- *Raisonnements divins*, MARTIN AIGNER - GUNTER M
ZIEGLER
- *Les sorcières de Salem*, site web du labo de maths Raphaël Salem
- *Le fascinant nombre π* , P. EYMARD ET J-P LAFON