

# Pavages : Quand l'Art rencontre les Maths

S. Simao

Lycée Monte-Cristo, Allauch

Forum des Maths à Rognac, Version courte, 11 mai 2023

# Pourquoi j'ai choisi ce thème ?

- De part mes origines au sud de l'Espagne et du Portugal où les pavages sont érigés sous forme d'art.

# Pourquoi j'ai choisi ce thème ?

- De part mes origines au sud de l'Espagne et du Portugal où les pavages sont érigés sous forme d'art.
- On voyage de la géométrie euclidienne enseignée au collège jusqu'à des maths actuelles avec plein de problèmes ouverts et d'applications.

# Qu'est ce qu'un pavage périodique du Plan ?



# Qu'est ce qu'un pavage périodique du Plan ?



## Une première définition

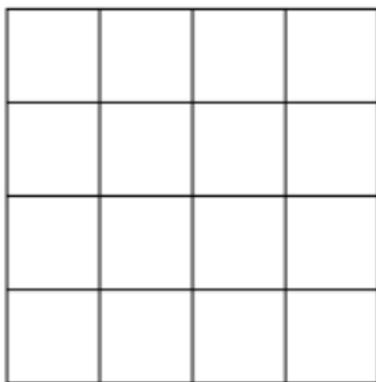
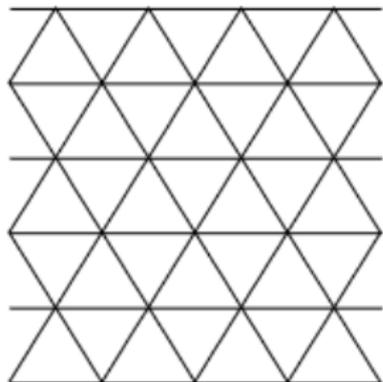
On appelle pavage du plan, tout recouvrement du plan par des tuiles de même forme sans chevauchement et trou.

Le pavage est dit périodique s'il est globalement invariant par translation dans deux directions différentes.

# Pavages par des polygones réguliers

## Théorème de Pappus -300 Av JC

Tout pavage du plan par une seul polygone régulier est l'un des trois exemples classiques : triangulaire, carré, hexagonal.



# Pavages par des polygones convexes quelconques

Peut-on réaliser de tel pavage avec :

- des triangles ?

# Pavages par des polygones convexes quelconques

Peut-on réaliser de tel pavage avec :

- des triangles? Oui ( Facile )
- des quadrilatères?

# Pavages par des polygones convexes quelconques

Peut-on réaliser de tel pavage avec :

- des triangles ? Oui ( Facile )
- des quadrilatères ? Oui ( plutôt facile ) Basé sur le théorème de Varignon 1650, les milieux des côtés d'un quadrilatère forment un parallélogramme.
- des hexagones ?

# Pavages par des polygones convexes quelconques

Peut-on réaliser de tel pavage avec :

- des triangles? Oui ( Facile )
- des quadrilatères? Oui ( plutôt facile ) Basé sur le théorème de Varignon 1650, les milieux des côtés d'un quadrilatère forment un parallélogramme.
- des hexagones? Oui pour trois types d'hexagones, démonstration difficile, Karl Reinhardt 1918
- des pentagones?

# Pavages par des polygones convexes quelconques

Peut-on réaliser de tel pavage avec :

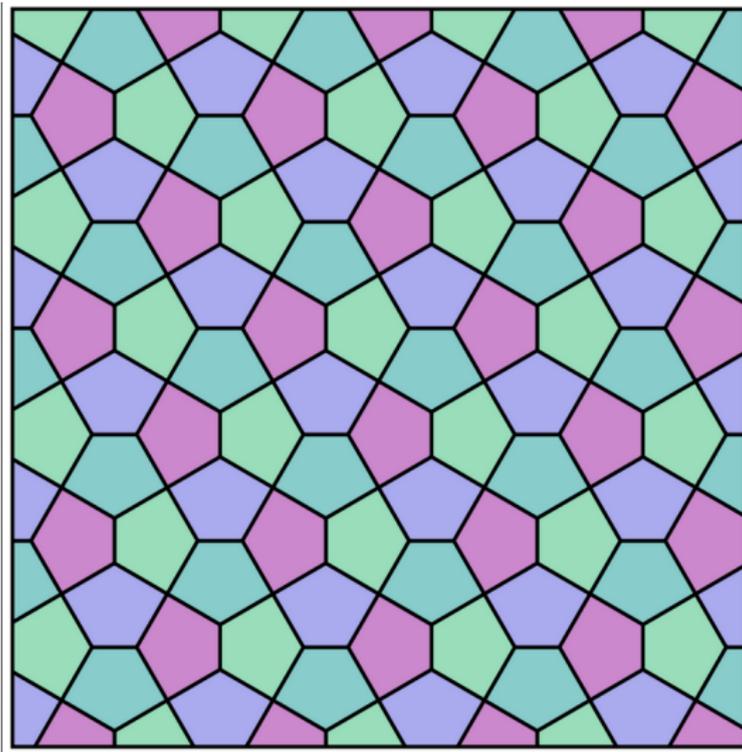
- des triangles ? Oui ( Facile )
- des quadrilatères ? Oui ( plutôt facile ) Basé sur le théorème de Varignon 1650, les milieux des côtés d'un quadrilatère forment un parallélogramme.
- des hexagones ? Oui pour trois types d'hexagones, démonstration difficile, Karl Reinhardt 1918
- des pentagones ? Oui pour 15 types de pentagones, démonstration très difficile, Michaël Rao 2017
- Des figures avec un plus grand nombre de côtés ?

# Pavages par des polygones convexes quelconques

Peut-on réaliser de tel pavage avec :

- des triangles ? Oui ( Facile )
- des quadrilatères ? Oui ( plutôt facile ) Basé sur le théorème de Varignon 1650, les milieux des côtés d'un quadrilatère forment un parallélogramme.
- des hexagones ? Oui pour trois types d'hexagones, démonstration difficile, Karl Reinhardt 1918
- des pentagones ? Oui pour 15 types de pentagones, démonstration très difficile, Michaël Rao 2017
- Des figures avec un plus grand nombre de côtés ? Non, plutôt facile ! Démo un peu identique à celle de Pappus

# Le pavage du Caire



# Un peu d'histoire : les zélliges

Retour vers le passé.

Début du dixième siècle après Jésus Christ, les musulmans développent un art décoratif basé sur des mosaïques aux motifs géométriques complexes probablement inspiré de mosaïques romanes et byzantines.

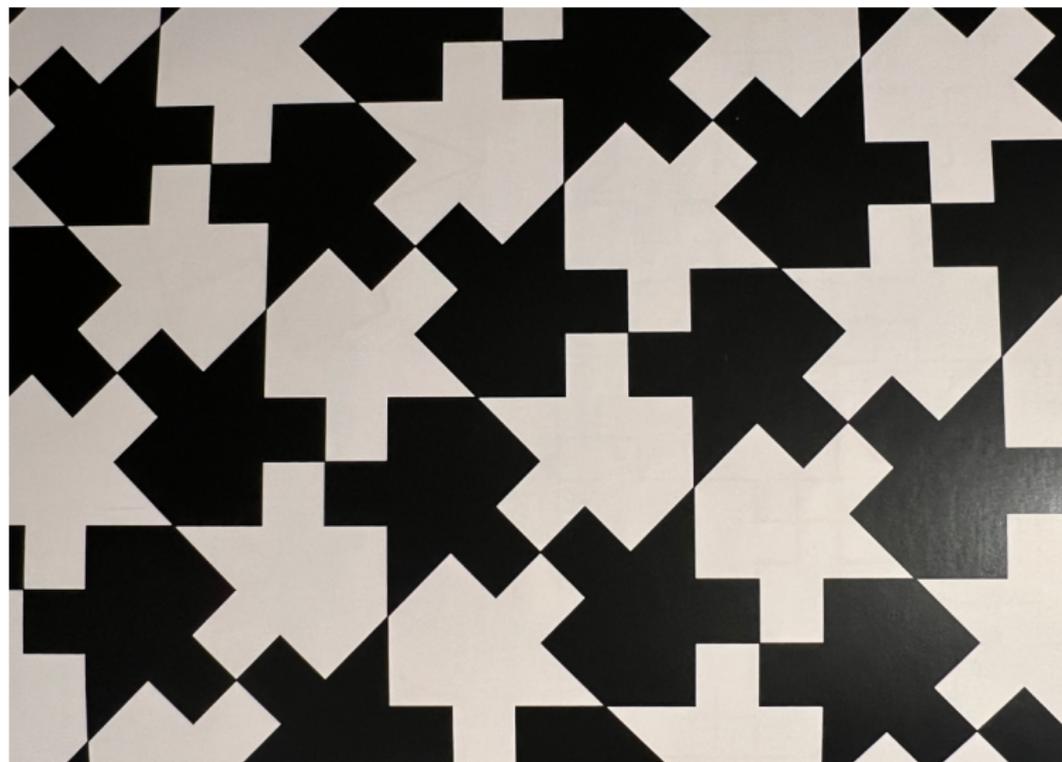
Au 13ème siècle, cet art atteint son apogée avec les magnifiques mosaïques de l'Alhambra à Grenade.

Ces motifs sont constructibles à la règle et au compas.

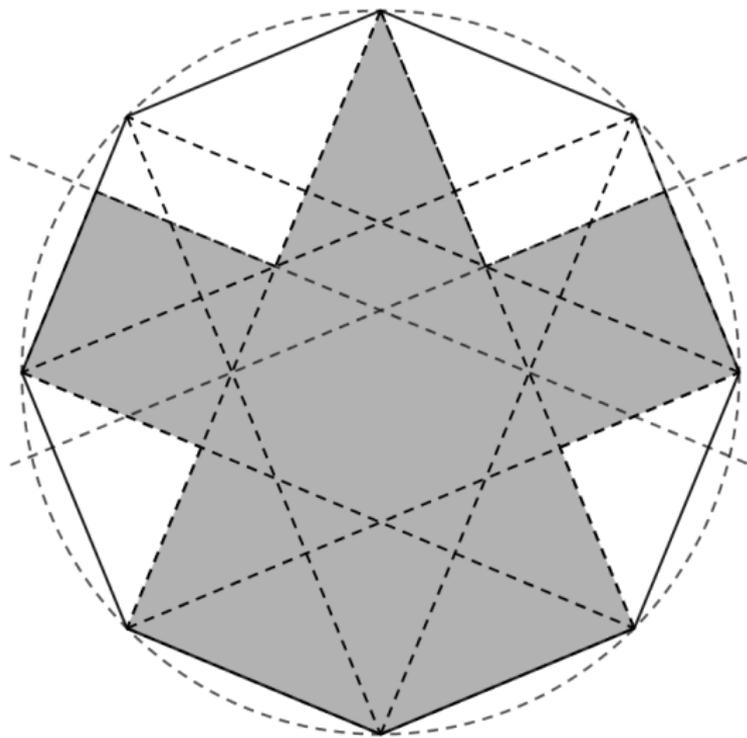
# Quelques motifs de pavage de l'Alhambra



# Quelques motifs de pavage de l'Alhambra



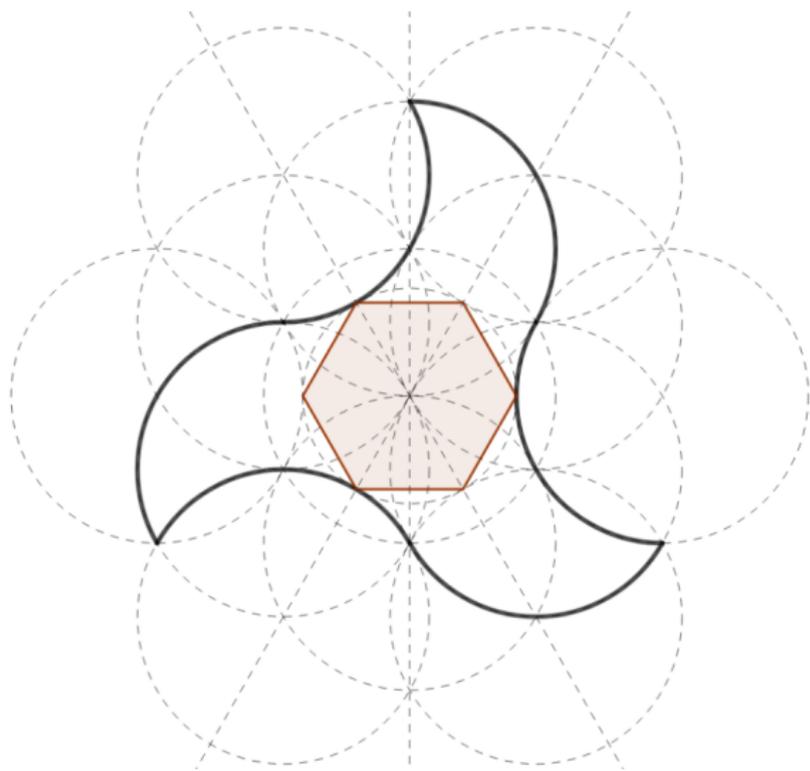
# Quelques motifs de pavage de l'Alhambra



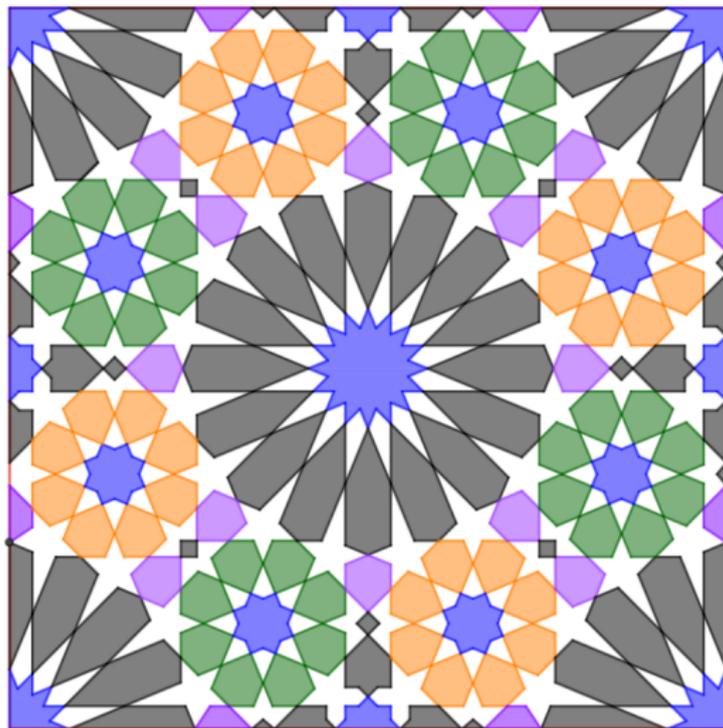
# Quelques motifs de pavage de l'Alhambra



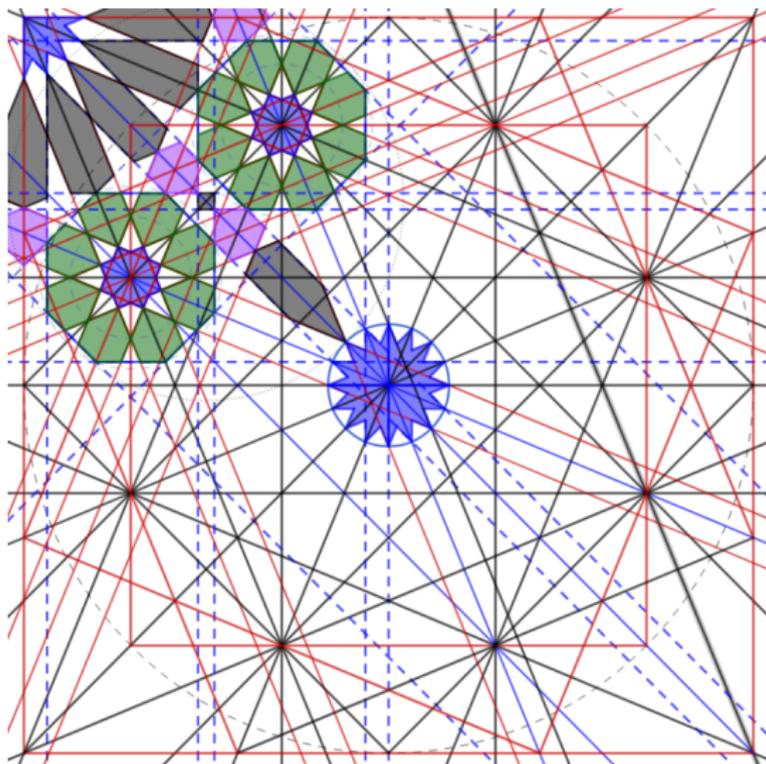
# Quelques motifs de pavage de l'Alhambra



# Quelques motifs de pavage de l'Alhambra



# Quelques motifs de pavage de l'Alhambra



# Classification des Pavages

## Théorème de Fédorov, 1891

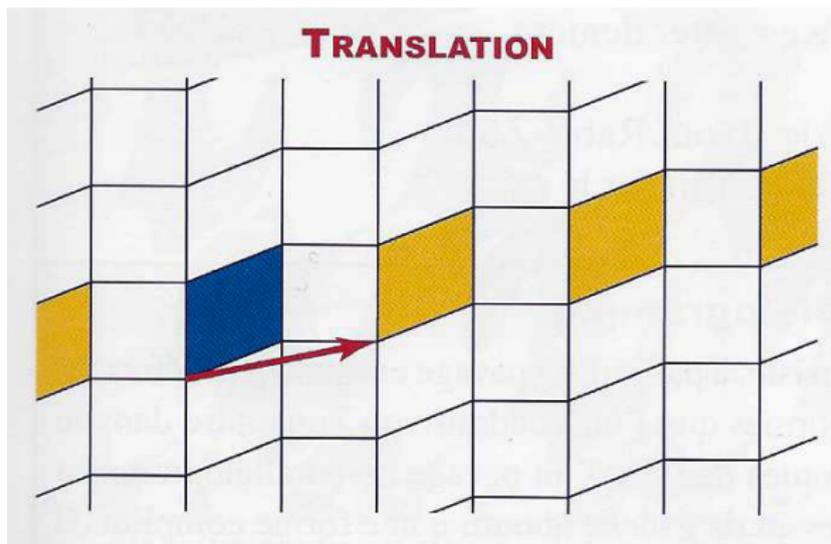
Il existe 17 différents "types" de Pavages

## Remarque :

Ces 17 types de pavages se retrouvent pour 14 à l'Alhambra et les trois restants à Tolède, ils étaient donc tous connus de la civilisation musulmane

# Isométries du plan

Pour envisager de comprendre les idées de cette démonstration, il faut affiner la définition de pavage et parler d'isométries du plan, transformations géométriques, qui préservent les distances. Les voici :



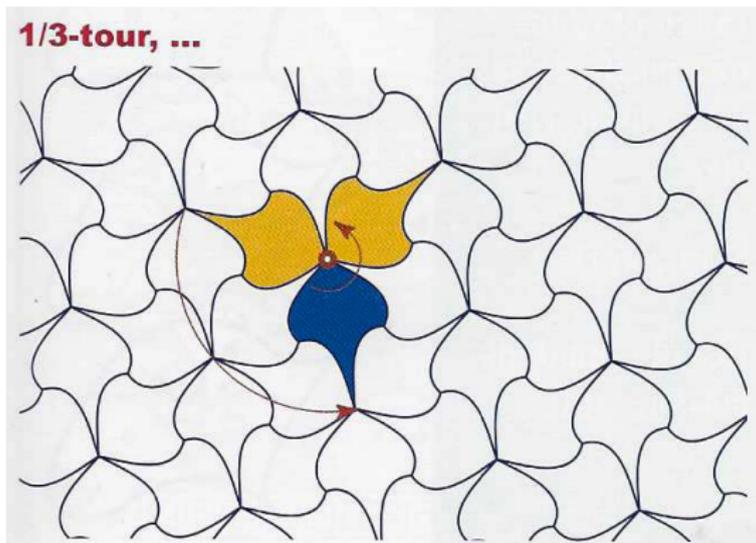
# Isométries du plan

Pour envisager de comprendre les idées de cette démonstration, il faut affiner la définition de pavage et parler d'isométries du plan, transformations géométriques, qui préservent les distances. Les voici :



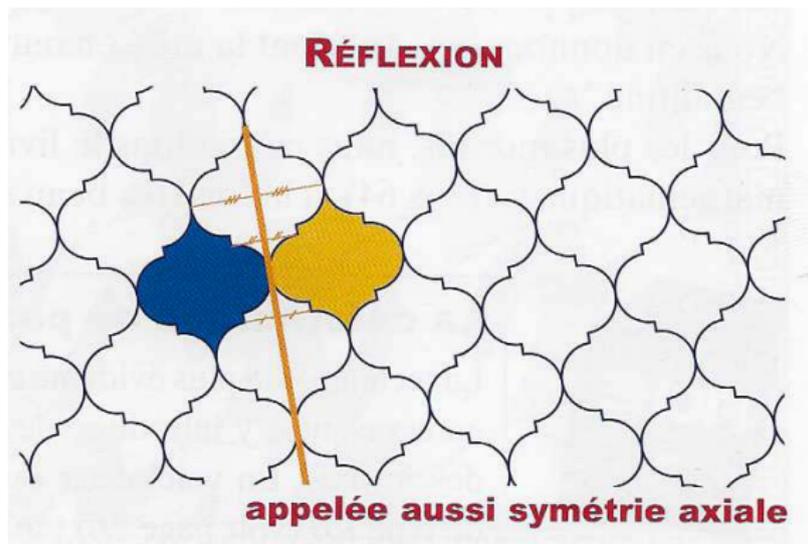
# Isométries du plan

Pour envisager de comprendre les idées de cette démonstration, il faut affiner la définition de pavage et parler d'isométries du plan, transformations géométriques, qui préservent les distances. Les voici :



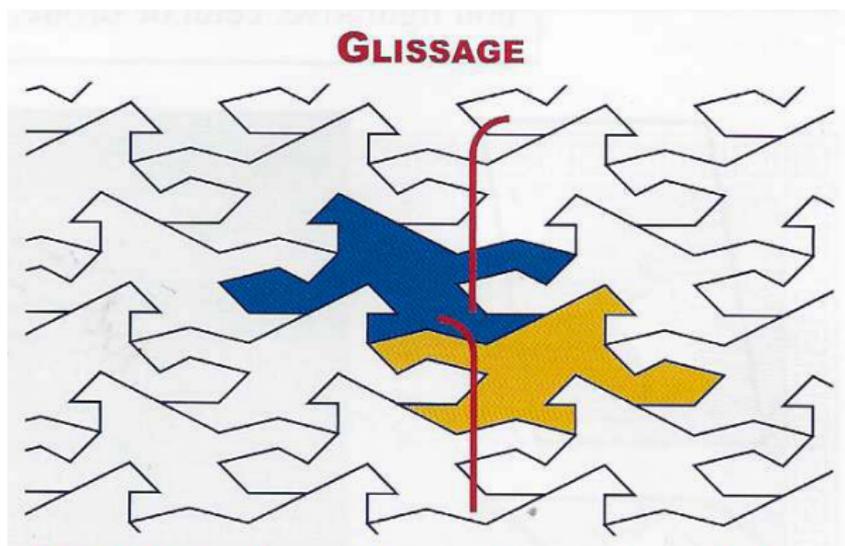
# Isométries du plan

Pour envisager de comprendre les idées de cette démonstration, il faut affiner la définition de pavage et parler d'isométries du plan, transformations géométriques, qui préservent les distances. Les voici :



# Isométries du plan

Pour envisager de comprendre les idées de cette démonstration, il faut affiner la définition de pavage et parler d'isométries du plan, transformations géométriques, qui préservent les distances. Les voici :



# Classification des Pavages

## Idées de la démonstration

Une autre vision de la géométrie initiée par Félix Klein, le programme d'Erlangen et la notion de groupe.

Le théorème de Fedorov devient alors, il y a 17 groupes d'isométries qui laissent invariant un pavage de plan.

Il faut débiter par les frises, ce qui est plus simple que sur le plan ( 7 groupes ).

# Classification des Pavages

## Idées de la démonstration

Une autre vision de la géométrie initiée par Félix Klein, le programme d'Erlangen et la notion de groupe.

Le théorème de Fedorov devient alors, il y a 17 groupes d'isométries qui laissent invariant un pavage de plan.

Il faut débiter par les frises, ce qui est plus simple que sur le plan ( 7 groupes ).



2 familles de translations, 4 familles de demi-tours

Exemple :

Le groupe de cristallographie de ce pavage est composé de :

- Deux familles de translation
- Quatre familles de symétries centrales

# De l'Alhambra à Escher

Maurits Cornelis Escher, artiste néerlandais (1898-1972) s'inspire des mathématiques et notamment de pavages pour créer ses oeuvres :

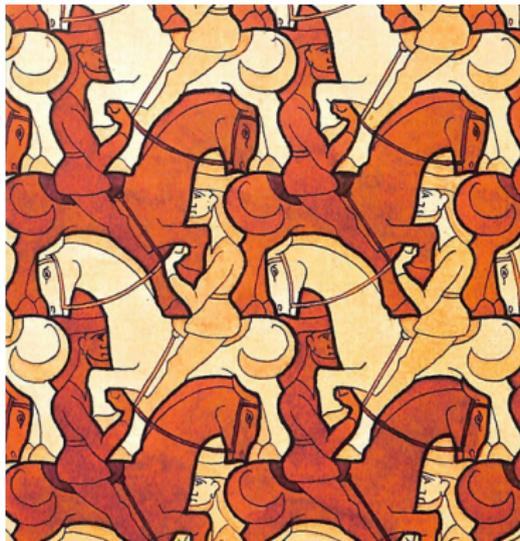
*L'Alhambra de Grenade est la source d'inspiration la plus fertile à laquelle j'ai bu.*



# De l'Alhambra à Escher

Maurits Cornelis Escher, artiste néerlandais (1898-1972) s'inspire des mathématiques et notamment de pavages pour créer ses oeuvres :

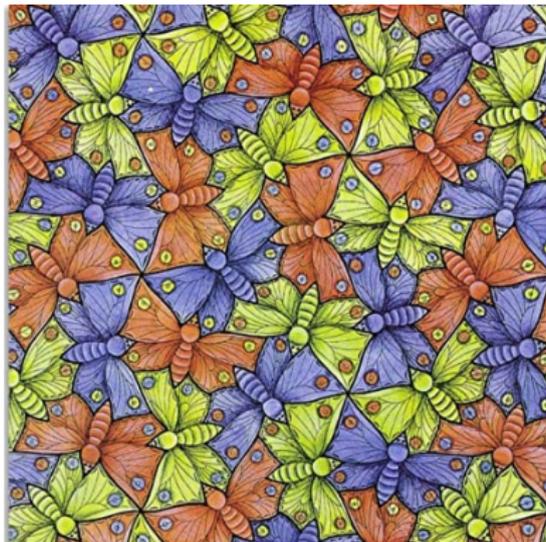
*L'Alhambra de Grenade est la source d'inspiration la plus fertile à laquelle j'ai bu.*



# De l'Alhambra à Escher

Maurits Cornelis Escher, artiste néerlandais (1898-1972) s'inspire des mathématiques et notamment de pavages pour créer ses oeuvres :

*L'Alhambra de Grenade est la source d'inspiration la plus fertile à laquelle j'ai bu.*



# De l'Alhambra à Escher

Maurits Cornelis Escher, artiste néerlandais (1898-1972) s'inspire des mathématiques et notamment de pavages pour créer ses oeuvres :

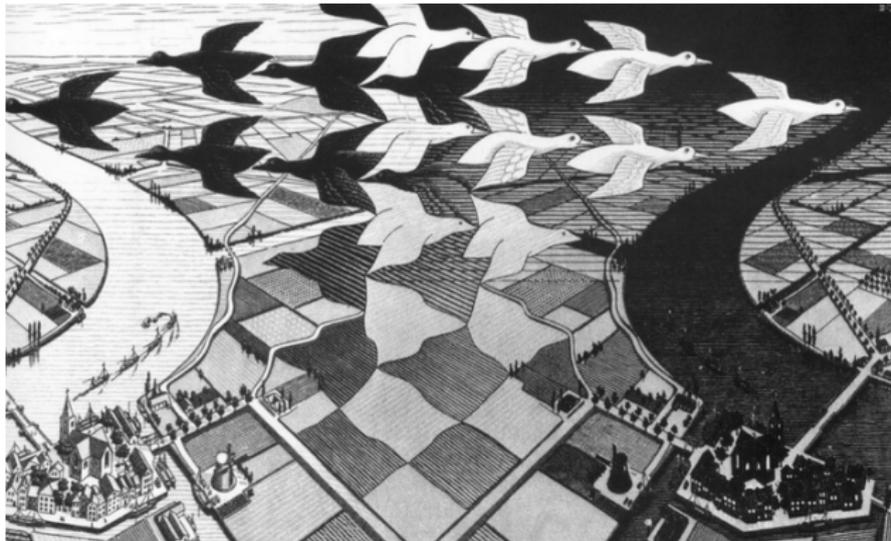
*L'Alhambra de Grenade est la source d'inspiration la plus fertile à laquelle j'ai bu.*



# De l'Alhambra à Escher

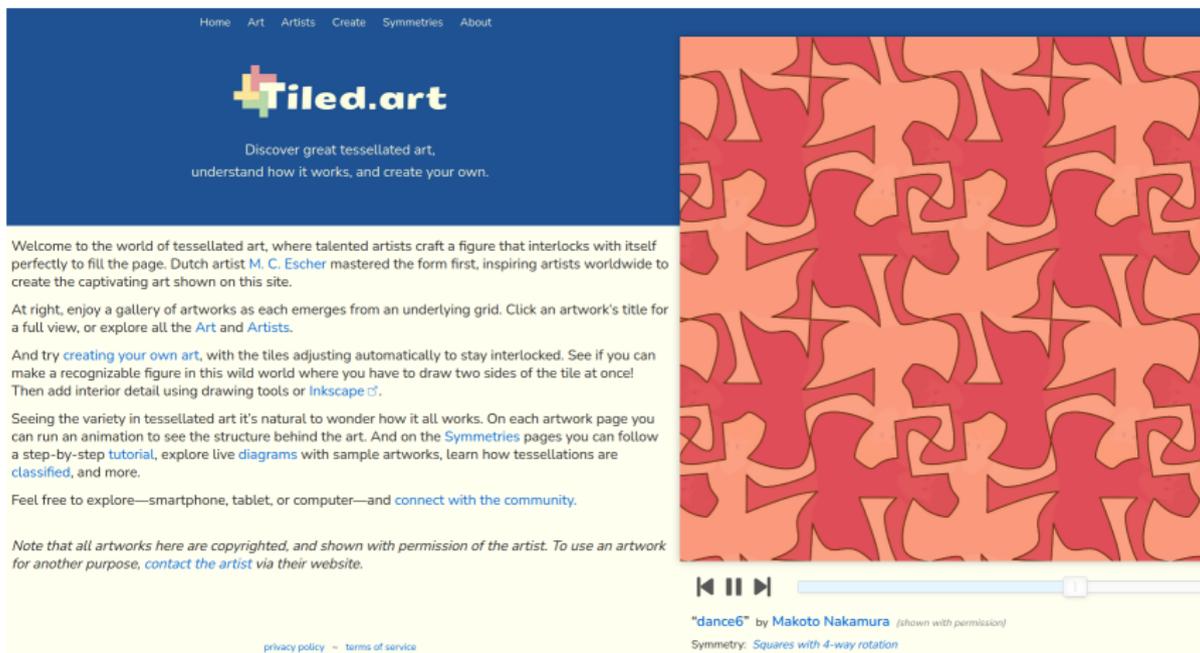
Maurits Cornelis Escher, artiste néerlandais (1898-1972) s'inspire des mathématiques et notamment de pavages pour créer ses oeuvres :

*L'Alhambra de Grenade est la source d'inspiration la plus fertile à laquelle j'ai bu.*



# Construire ses propres pavages périodiques

Un site magnifique : [Tiled Art](#)



Home Art Artists Create Symmetries About

**Tiled.art**

Discover great tessellated art, understand how it works, and create your own.

Welcome to the world of tessellated art, where talented artists craft a figure that interlocks with itself perfectly to fill the page. Dutch artist [M. C. Escher](#) mastered the form first, inspiring artists worldwide to create the captivating art shown on this site.

At right, enjoy a gallery of artworks as each emerges from an underlying grid. Click an artwork's title for a full view, or explore all the [Art](#) and [Artists](#).

And try [creating your own art](#), with the tiles adjusting automatically to stay interlocked. See if you can make a recognizable figure in this wild world where you have to draw two sides of the tile at once! Then add interior detail using drawing tools or [Inkscape](#).

Seeing the variety in tessellated art it's natural to wonder how it all works. On each artwork page you can run an animation to see the structure behind the art. And on the [Symmetries](#) pages you can follow a step-by-step [tutorial](#), explore live [diagrams](#) with sample artworks, learn how tessellations are [classified](#), and more.

Feel free to explore—smartphone, tablet, or computer—and [connect with the community](#).

*Note that all artworks here are copyrighted, and shown with permission of the artist. To use an artwork for another purpose, [contact the artist](#) via their website.*

privacy policy → terms of service

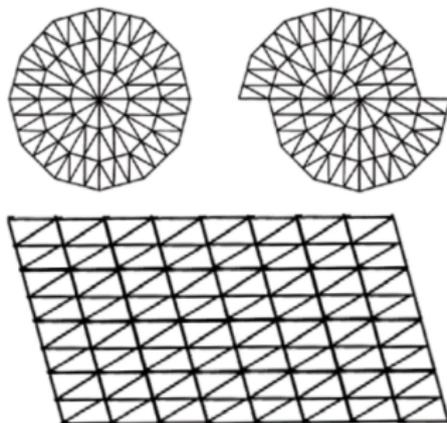
«dance6» by Makoto Nakamura (shown with permission)  
Symmetry: Squares with 4-way rotation

# Ensemble de pavages apériodiques

## Définition

Un ensemble de pavage apériodique du plan est un ensemble de pavés conduisant uniquement à des pavages non périodiques du plan.

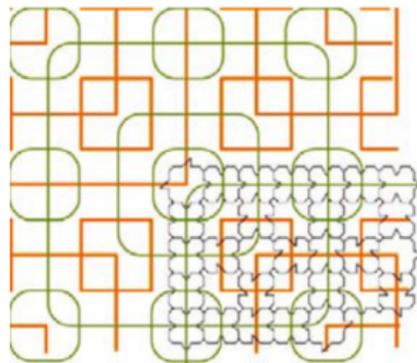
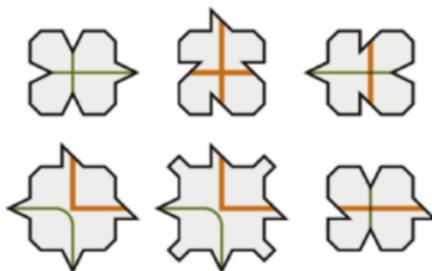
Par exemple ce pavage n'est pas apériodique



# La course aux nombres de tuiles

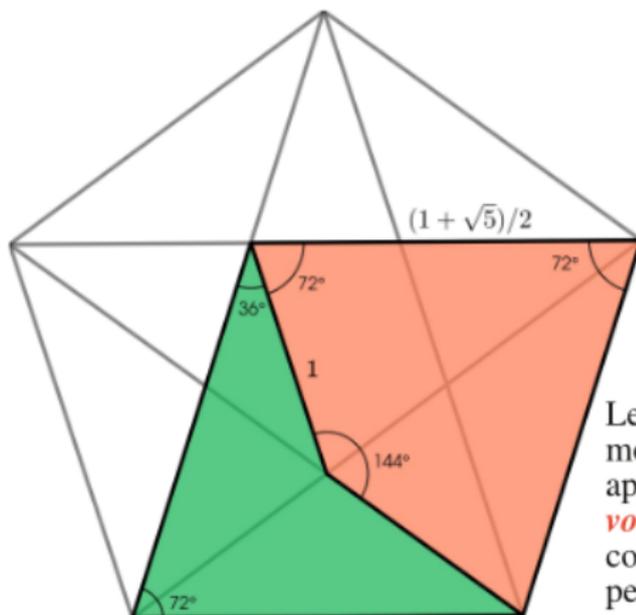
Existe-t'il des ensembles de pavage apériodique du plan ?

- 1964 Berger construit un ensemble de pavage apériodique de 20 426 tuiles
- 1971 Robinson utilise 6 tuiles



- 1974 Penrose utilise 2 tuiles

# Pavage de Penrose

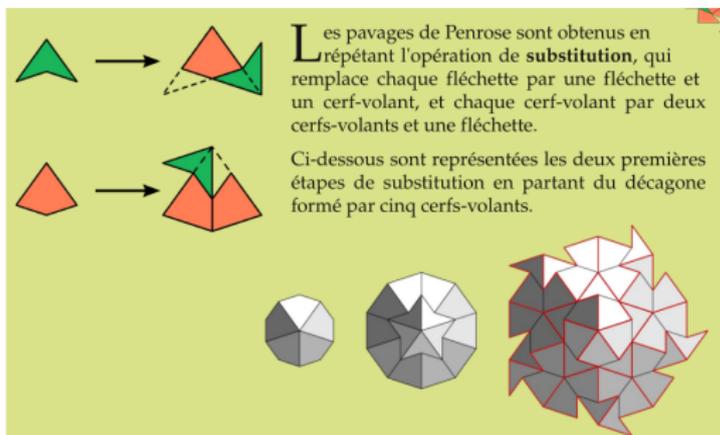


Les deux pavés de base du modèle présenté ici sont appelés *fléchette* et *cerf-volant*, et peuvent être construits à l'intérieur d'un pentagone régulier.

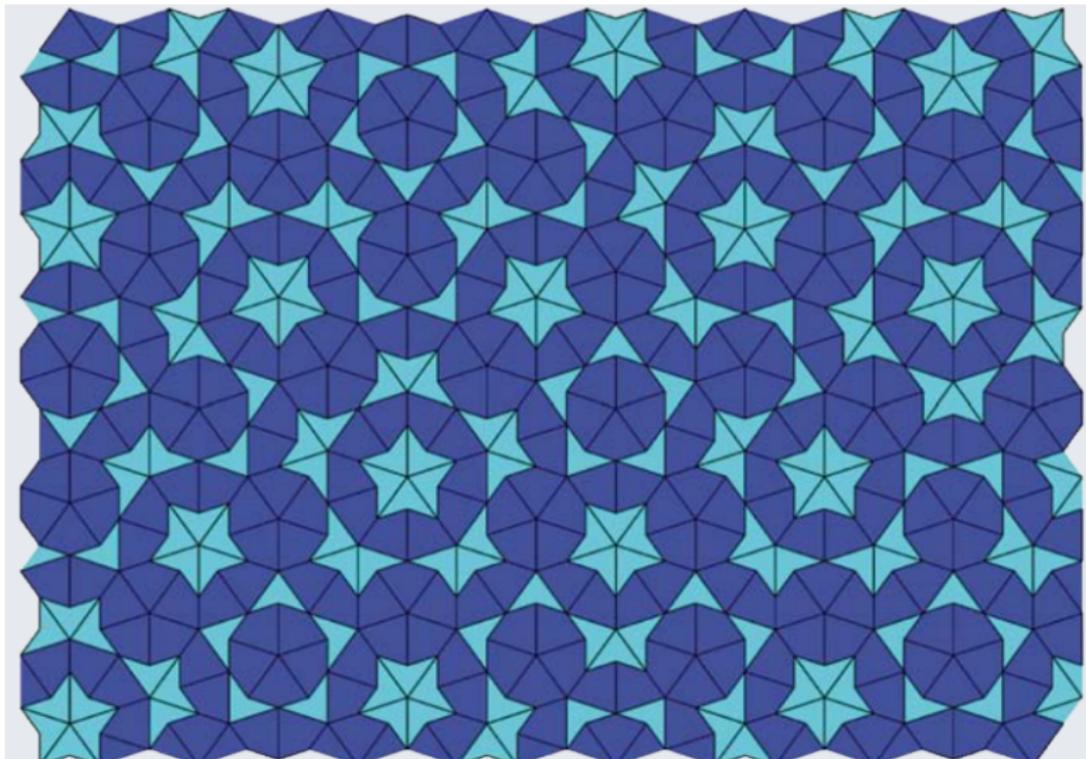
# Pavage de Penrose, idées de la démonstration

## Méthode : A t'on un ensemble de pavage apériodique ?

- Il faut trouver une méthode de construction du pavage : ici principe de substitution
- Il faut expliquer qu'il n'existe pas de pavage périodique avec les mêmes pièces : ici irrationalité des longueurs de la pièce



# Pavage de Penrose

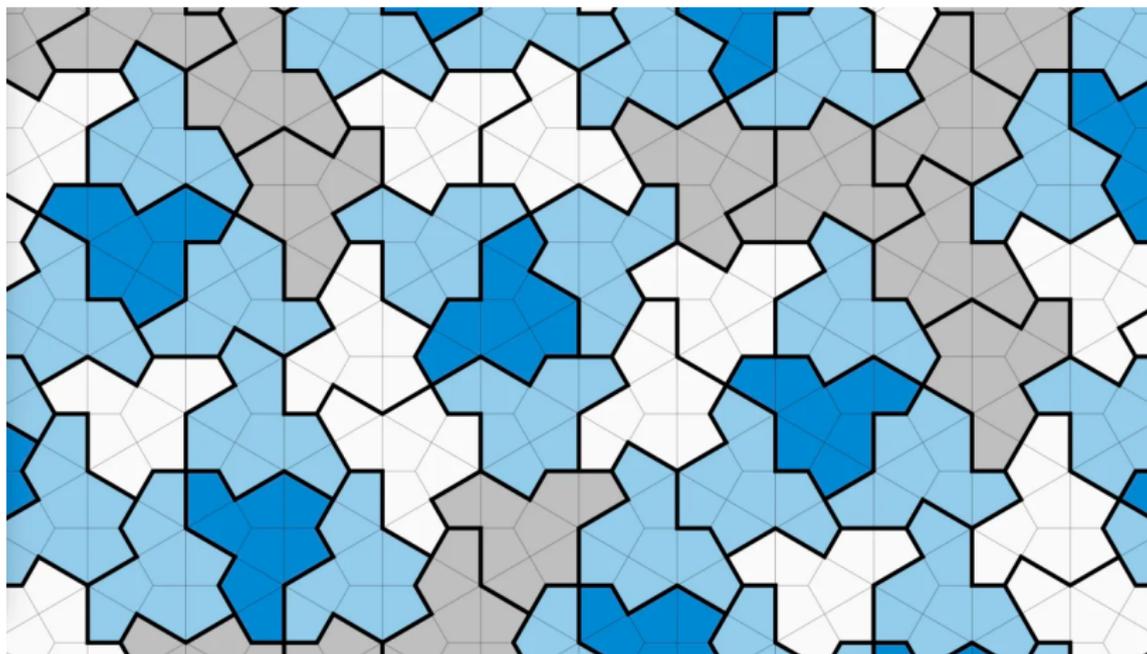


# Des pavages sur du papier toilette

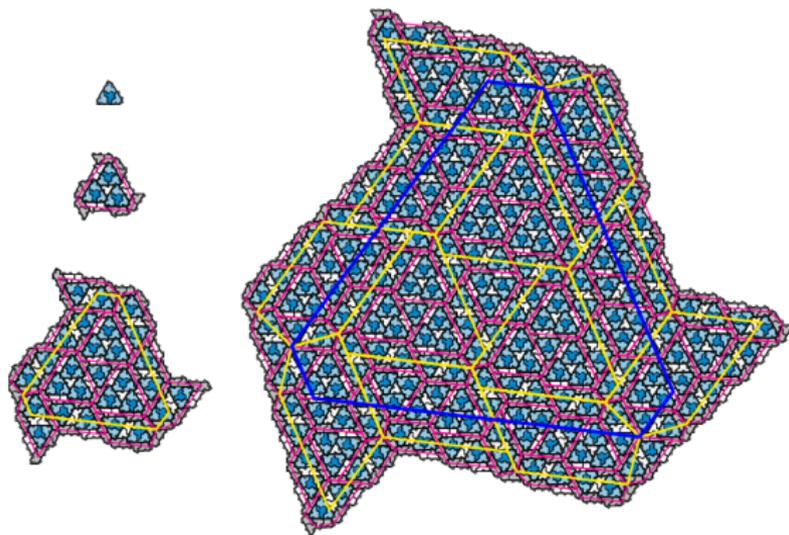


# Le Grall : Einstein Tile

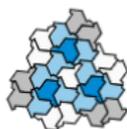
Découvert par D. Smith démontré par Myers, Kaplan et Goodman-Strauss 2022



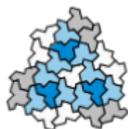
# Einstein Tile, idée de la démo



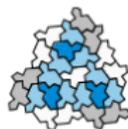
Tile(0, 1)



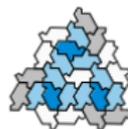
Tile(1, 4)



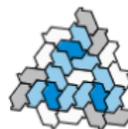
Tile(1,  $\sqrt{3}$ )



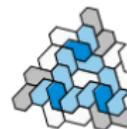
Tile(1, 1)



Tile( $\sqrt{3}$ , 1)



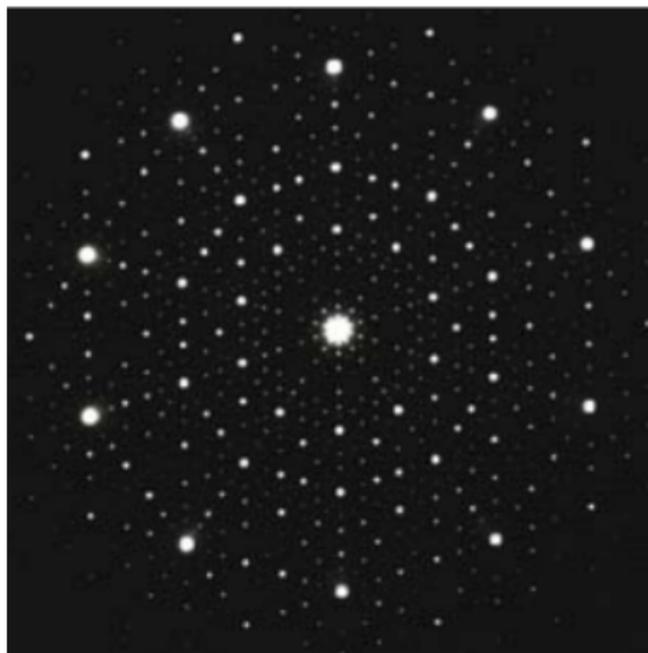
Tile(4, 1)



Tile(1, 0)

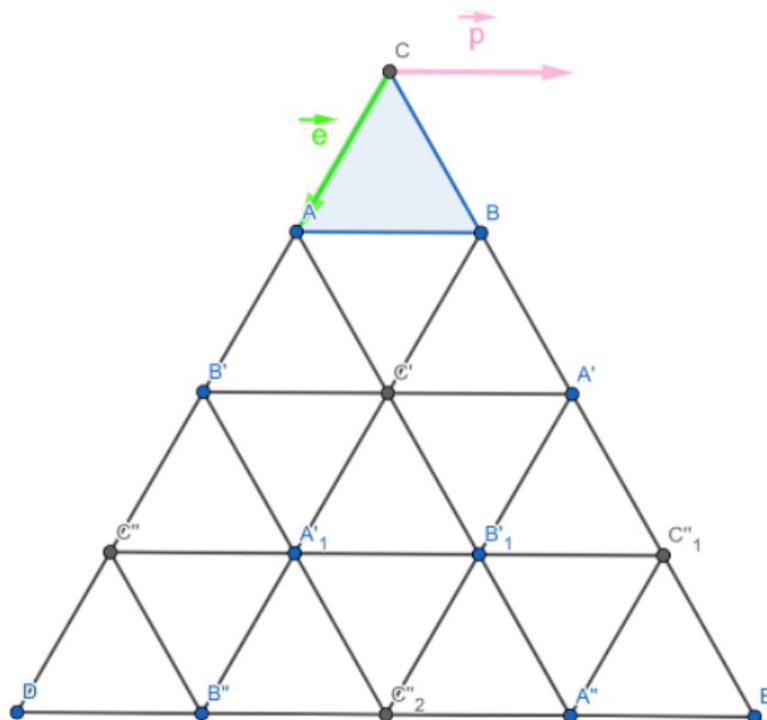
# Application 1

Quasi-Cristaux : Découverts par D. Shechtman en 1982, prix nobel de chimie 2011



# Application 2

Clin d'oeil à  $\text{TFJM}^2$ , trajectoires dans un billard triangulaire.



# Ouvertures

Pavages semi-régulier 7 types de pavages avec plusieurs polygones régulier.

Pavages en 3D → 235 types de pavages .

Pavage avec des fractales flocons de Von Koch.

Pavages Hyperboliques.



# Références

[Harp] Pierre de la Harpe. *Pavages*

[Ghy] E Ghys *L'énigme des pentagones, Images des Maths*

[Chro] S Mehl *Chronomaths, article sur les pavages*

[Vel] M. Vella *L'Alhambra à la règle est au compas*

[Kang] A. Deledicq, R. Raba, *Le monde des pavages*

[Del] J-Paul Delahaye, *la quête du pavage apériodique unique*

[Einst] D Smith, J.S Myers, C.S Kaplan, C Goodman-Strauss *An aperiodic monotile*

# Merci pour votre écoute !

Diaporama de la conférence en libre accès,modifiable ici :

