# Mathématiques autour des tapis en Hitomezashi

# Un peu d'Histoire

L'Hitomezashi est une forme de broderie traditionnelle japonaise issue du Sashiko très utilisé pendant l'époque Edo (1603-1868). À cette époque, où le Japon était à l'origine coupé du monde commercialement, ces broderies servaient à rapiécer des vêtements ou les solidifier.

Pour en concevoir, il faut respecter les deux règles suivantes :

- 1. Une aiguille passe dessus-dessous le tissu, en créant un segment en pointillé, les traits pleins étant de longueur identique aux longueurs des espacements.
- 2. Les fils sont disposés dans deux directions perpendiculaires formant une motif dans une quadrillage



# Objectifs pédagogiques

L'objectif est de montrer que derrière des motifs visuellement très attiranst se cache des mathématiques à étudier regroupant plusieurs domaines enseignés au secondaire ou dans le supérieur. Domaines que les élèves croient à tort déconnectés. Comme le dit Olga: "L'art d'un mathématicien ou d'une mathématicienne est parfois de se poser les bonnes questions et de s'intéresser à celles qui les motivent le plus". Dee plus les élèves pourraient choisir les domaines qui les incitent et à se concentrer en ajoutant des questions issues de leurs observations ou d'articles de recherches.

#### Des Hitomezashi avec des mots ou des nombres sur des feuilles

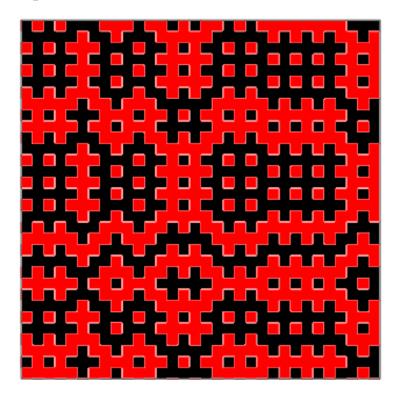
Il suffit de poser des mots ou nombres sur les bords des quadrillage, lettre par lettre ou chiffre par chiffre. Ils vont nous donner la méthode de tracé.

- Pour des mots on choisit un type de pointillé pour les voyelles : plein vide plein vide ...ou vide plein vide plein ...et pour les consonnes celui que l'on n'a pas choisir pour les voyelles.
- Pour les nombres on choisit un type de pointillé pour chaque chiffre suivant sa parité : pair ou impair.
- 1. Prenez une feuille à petit carreau quadrillée et amusez-vous maintenant à en tracer avec les mots ou chiffres de votre choix!
- 2. Expliquez avec quels nombres ou mots, on peut arriver à faire le motif de la première page.
- 3. Avec des nombres différents trouvera t'on toujours des motifs différents?

#### Hitomezashi et Combinatoire

- 1. Sur une grille  $32 \times 32$ , comme prévue dehors au Cirm. Combien y a t'il de possibilités différentes de motifs d'Hitomezashi?
- 2. On estime qu'un motif d'Hitomezashi de cette taille se trace en 20 minutes combien d'années il faudrait pour tous les tracer sans s'arreter? Comparer avec la date de création de l'univers.
- 3. Défi, si on se restreint à utiliser à des mots de la langues Française, pouvez vous donner un majorant le plus petit possible du nombre de possibilité de motifs différents.

# Un programme pour les tracer, un programme pour les amener tous et dans la beauté les contempler!



L'objectif est maintenant de tracer plus rapidement ces motifs pour cela on va utiliser l'outil informatique. Vous pouvez tenter de faire le programme avec Scratch ou Python, il faudra utiliser un bibliothèque graphique pour python. Faites attention à la taille en pixel de votre quadrillage.

1. Créer un fonction carre(longueur) qui tracera un carré de taille quelconque centré en (0,0). Celui-ci sera le bord du tapis

- 2. Définir une fonction ligne\_horizon1 qui prend trois paramètres une longueur et une largeur et hauteur et qui trace une ligne pointillé constitué de 16 tirés identiques espacés de la même longueur et qui commence au point de coordonnées (largeur; hauteur). Cette ligne commencera par un tiret.
- 3. Définir une fonction ligne\_horizon2 qui fait la même chose que la première fonction mais en commençant par un vide.
- 4. Définir deux fonctions ligne\_vertical1 et ligne\_vertical2 qui font la même chose que les deux premières mais les lignes sont verticales cette fois-ci
- 5. Définir une fonction hitomezashi() qui trace un tapis aléatoire de 32 par 32 en utilisant les fonctions précédentes
- 6. Pour aller plus loin : créer des hitomezashi de taille quelconque, automatiser le coloriage du tapis, créer un clip en stop motion de différents tapis aléatoires...

Pour ceux qui voudraient expérimenter sans coder voici le programme python pour tracer aléatoirement des tapis sur une grille 32\*32

#### Hitomezashi et nombres rationnels ou irrationnels

On décide maintenant de faire des Hitomezashi avec le développement décimal de nombres.

- 1. Si on prend deux fractions différentes en horizontal et vertical que va t'on observer si on fait des motifs de plus en plus gros?
- 2. Maintenant on prend les décimale de  $\pi$  en horizontal et les mêmes mais décalées mais en commençant par la 10 ème en vertical. Va t'on retrouver des motifs similaires? Essayer de justifier votre intuition. On pourra utiliser le programme pour se forger une idée.

# Hitomezashi et Arithmétique

On peut prendre pour unité de longueur, la longueur d'un pointillé et pour aire la longueur d'un carré constitué Dans cette partie on va parler de quelques propriétés sur les lacets ( courbes fermée ) d'Hitomezashi.

Propriété 1 (Pete 2008). Tout lacet d'Hitomezashi a une largeur et une hauteur paire.

- 1. Tester si cette propriété est vraie sur quelques exemples de tapis tracé sur ordinateur ou sur papier.
- 2. Est ce suffisant pour en conclure que que cette propriété est toujours vraie?
- 3. Pour esquisser une idée de la démonstration, regarder comment les déplacements se font sur la le lacet en les décomposant de quatre façons (vertical haut, vertical bas, horizontal gauche et horizontal droite).

Plus complexe:

**Théorème 1** ( C. Defant et N. Kravitz 2022). Tout lacet d'Hitomezashi a une largeur congrue à 4 modulo 8 et une aire à 1 modulo 4

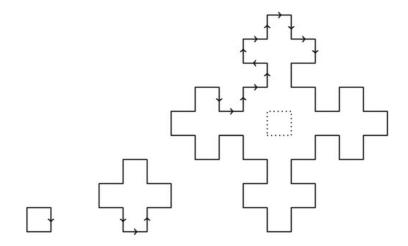
- 1. Il faut d'abord comprendre la notion de congruence que l'on voit en terminale mathématiques expertes. l congrue à 4 modulo 8 signifie que le reste de la division euclidienne de 1 par 8 vaut 4. Calculer 35 modulo 8 et 30 modulo 4
- 2. Tester si cette propriété est vraie sur quelques exemples de tapis tracés sur ordinateur ou sur papier.
- 3. Vous êtes curieux regarder l'article de [De-Kr].

#### Hitomezashi et flocon de Fibonnaci

L'objectif est de trouver les nombres qui permettent de construire des flocons de Fibonnaci, les mots sont construits par concaténation et par récurrence et utilise la notion de tapis "dual" où les positions des lignes sont "inversées".



- 1. Tracer sur une feuille plusieurs tapis d'Hitomezashi et leurs tapis duaux
- 2. A partir l'article de [Sea] et d'un tapis 3\*3 essayer de construire les tapis contenant des flocons plus grand avec la formule de récurrence donnée



#### Hitomezashi et Séries

Pour les élèves qui visent des études de maths dans le supérieur vous pouvez regarder ce théorème.

**Théorème 2.** Le nombre de régions dans un tapis d'Hitomezashi de taille  $m \times n$  tend asymptotiquement vers  $\frac{\pi^2 - 9}{12}mn$ ,

Cette démonstration utilise des séries je vous encourage à regarder l'article qui en parle [De-Kr].

#### Hitomeszashi et Percolation

Maintenant on s'interesse à la question suivante, si on prend un point du bord gauche du tapis au hasard, existe-t'il un "chemin" sur le tapis pour passer sur le côté droit. Ce genre de problème est lié à la théorie de la percolation qui permet de modéliser par exemple comment l'eau rentre et se propage dans de la terre.

- 1. A l'aide du programme Python, tracer plusieurs tapis avec des nombres au hasard en variant le pourcentage de chiffres pairs, observer l'effet sur la percolation.
- 2. Vous voulez en savoir plus sur la percolation regarder cette vidéo de vulgarisation d'Hugo Duminil-Copin spécialiste de la percolation et médaillé fields Français : [Cop]

## D'autres pistes de recherche

Et si on prenait des quadrillages différents, par exemple avec des triangles équilatéraux? Est ce possible d'en tracer en 3D? Créer vos propres questions et explorer!

# Associations Mathématiques Vagabondes et Maths pour Tous

Olga Paris-Romaskevich, qui nous a proposé cet atelier, est un des co-fondatrice de l'association Mathématiques Vagabondes. L'association propose l'activité Streetmath création d'oeuvres collectives inspirés par les mathématiques dans l'espace urbain depuis mai 2020 dans les rues et places de Lyon.



Photo sous licence CC BY-SA de Bertrand Paris-Romaskevich

Sébastien Simao est professeur de Mathématiques au lycée Monte-Cristo d'Allauch. Membre de l'IRES Aix-Marseille vulgarisation des maths et de l'association Maths pour tous qui organise sur la région PACA de nombreuses activités de vulgarisation mathématiques ouverte à au grand public : fêtes de la science, journée des sciences à Coudoux, forum des maths à Rognac, club de Mathématiques de Marseille.

## Références

[Numb] Numberphile Hitomezashi Stich Patterns

[Sea] Katerin A. Seaton. 2022 Mathematical specification of hitomezashi designs

[De-Kr] Colin Defant et Noah Kravitz. 2022 Loops and regions in hitomezashi patterns

[Cop] Hugo Duminil-Copin, une question un chercheur SMF 2022 Du café aux mathématiques