

Pavages : Quand l'Art rencontre les Maths

S. Simao

Lycée Monte-Cristo, Allauch

Venelles, 15 Novembre 2025

Plan

- 1 Introduction
- 2 Pavages Périodiques du Plan
- 3 Pavages Apériodiques
- 4 Pour aller plus loin

Pourquoi j'ai choisi ce thème ?

- De part mes origines sud de l'Espagne et du Portugal où les pavages sont érigés sous forme d'art.

Pourquoi j'ai choisi ce thème ?

- De part mes origines sud de l'Espagne et du Portugal où les pavages sont érigés sous forme d'art.
- On voyage de la géométrie euclidienne enseignée au collège jusqu'à des maths actuelles avec plein de problèmes ouverts et d'applications.

Pourquoi j'ai choisi ce thème ?

- De part mes origines sud de l'Espagne et du Portugal où les pavages sont érigés sous forme d'art.
- On voyage de la géométrie euclidienne enseignée au collège jusqu'à des maths actuelles avec plein de problèmes ouverts et d'applications.

Plan

- 1 Introduction
- 2 Pavages Périodiques du Plan
- 3 Pavages Apériodiques
- 4 Pour aller plus loin

Qu'est ce qu'un pavage périodique du Plan ?



Qu'est ce qu'un pavage périodique du Plan ?



Une première définition

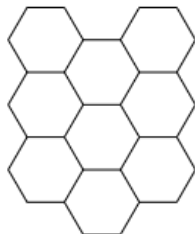
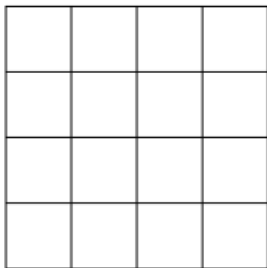
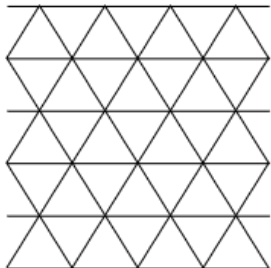
On appelle pavage du plan, tout recouvrement du plan par des tuiles de même forme sans chevauchement et trou.

Le pavage est dit périodique s'il est globalement invariant par translation dans deux directions différentes.

Pavages par des polygones réguliers

Théorème de Pappus -300 Av JC

Tout pavage du plan par un seul polygone régulier est l'un des trois exemples classiques : triangulaire, carré, hexagonal.



Pavages par des polygones convexes quelconques

Peut-on réaliser de tel pavage avec :

- des triangles ?

Pavages par des polygones convexes quelconques

Peut-on réaliser de tel pavage avec :

- des triangles ? Oui (Facile)
- des quadrilatères ?

Pavages par des polygones convexes quelconques

Peut-on réaliser de tel pavage avec :

- des triangles ? Oui (Facile)
- des quadrilatères ? Oui (plutôt facile) Basé sur le théorème de Varignon 1650, les milieux des côtés d'un quadrilatère forment un parallélogramme)
- des hexagones ?

Pavages par des polygones convexes quelconques

Peut-on réaliser de tel pavage avec :

- des triangles ? Oui (Facile)
- des quadrilatères ? Oui (plutôt facile) Basé sur le théorème de Varignon 1650, les milieux des côtés d'un quadrilatère forment un parallélogramme)
- des hexagones ? Oui pour trois types d'hexagones, démonstration difficile, Karl Reinhardt 1918
- des pentagones ?

Pavages par des polygones convexes quelconques

Peut-on réaliser de tel pavage avec :

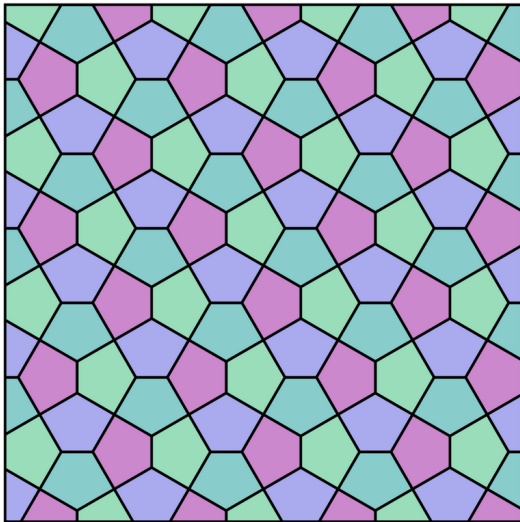
- des triangles ? Oui (Facile)
- des quadrilatères ? Oui (plutôt facile) Basé sur le théorème de Varignon 1650, les milieux des côtés d'un quadrilatère forment un parallélogramme)
- des hexagones ? Oui pour trois types d'hexagones, démonstration difficile, Karl Reinhardt 1918
- des pentagones ? Oui pour 15 types de pentagones, démonstration très difficile, Michaël Rao 2017
- Des figures avec un plus grand nombre de côtés ?

Pavages par des polygones convexes quelconques

Peut-on réaliser de tel pavage avec :

- des triangles ? Oui (Facile)
- des quadrilatères ? Oui (plutôt facile) Basé sur le théorème de Varignon 1650, les milieux des côtés d'un quadrilatère forment un parallélogramme)
- des hexagones ? Oui pour trois types d'hexagones, démonstration difficile, Karl Reinhardt 1918
- des pentagones ? Oui pour 15 types de pentagones, démonstration très difficile, Michaël Rao 2017
- Des figures avec un plus grand nombre de côtés ? Non, plutôt facile ! Démo un peu identique à celle de Pappus

Le pavage du Caire



Un peu d'histoire : les zélliges

Retour vers le passé.

Un peu d'histoire : les zélliges

Retour vers le passé.

Début du dixième siècle après Jésus Christ, les musulmans développent un art décoratif basé sur des mosaïques aux motifs géométriques complexes probablement inspiré de mosaïques romanes et byzantines.

Un peu d'histoire : les zélliges

Retour vers le passé.

Début du dixième siècle après Jésus Christ, les musulmans développent un art décoratif basé sur des mosaïques aux motifs géométriques complexes probablement inspiré de mosaïques romanes et byzantines.

Au 13ème siècle, cet art atteint son apogée avec les magnifiques mosaïques de l'Alhambra à Grenade.

Un peu d'histoire : les zélliges

Retour vers le passé.

Début du dixième siècle après Jésus Christ, les musulmans développent un art décoratif basé sur des mosaïques aux motifs géométriques complexes probablement inspiré de mosaïques romanes et byzantines.

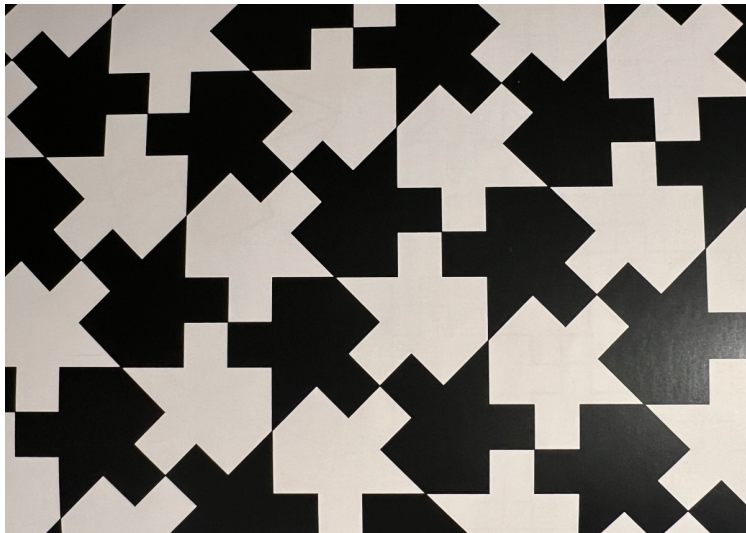
Au 13ème siècle, cet art atteint son apogée avec les magnifiques mosaïques de l'Alhambra à Grenade.

Ces motifs sont constructibles à la règle et au compas.

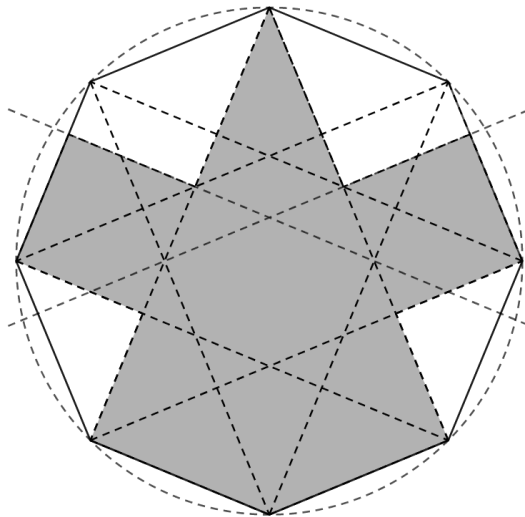
Quelques motifs de pavage de l'Alhambra



Quelques motifs de pavage de l'Alhambra



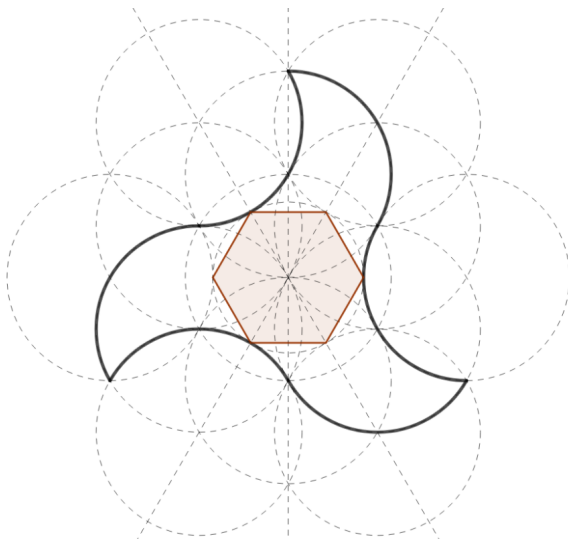
Quelques motifs de pavage de l'Alhambra



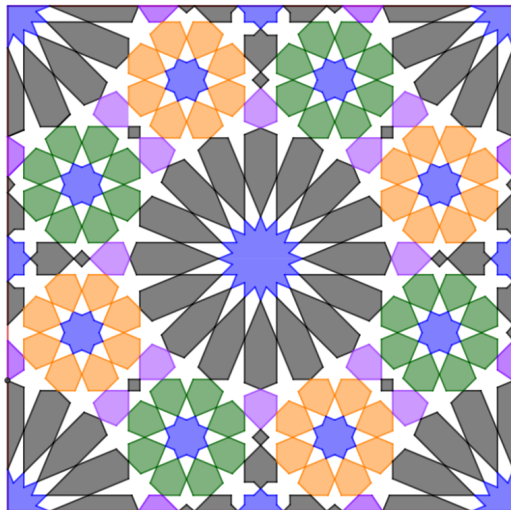
Quelques motifs de pavage de l'Alhambra



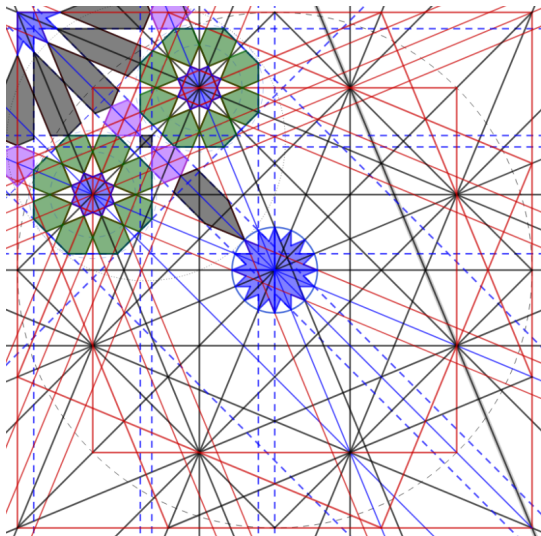
Quelques motifs de pavage de l'Alhambra



Quelques motifs de pavage de l'Alhambra



Quelques motifs de pavage de l'Alhambra



Classification des Pavages

Théorème de Fédorov, 1891

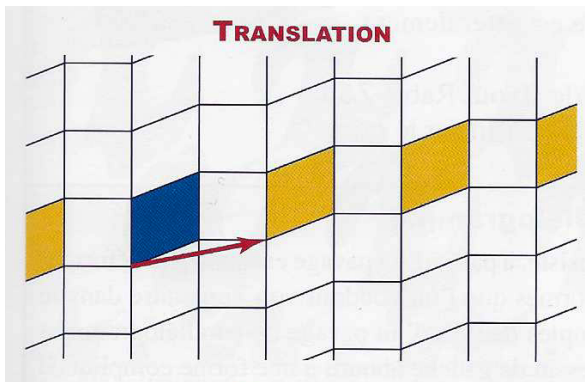
Il existe 17 différents "types" de Pavages

Remarque :

Ces 17 types de pavages se retrouvent pour 14 à l'Alhambra et les trois restants à Tolède, ils étaient donc tous connus de la civilisation musulmane

Isométries du plan

Pour envisager de comprendre les idées de cette démonstration, il faut affiner la définition de pavage et parler d'isométries du plan : transformation géométriques, qui préservent les distances. Les voici :



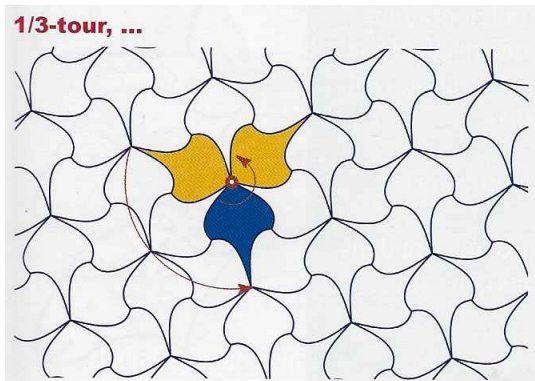
Isométries du plan

Pour envisager de comprendre les idées de cette démonstration, il faut affiner la définition de pavage et parler d'isométries du plan : transformation géométriques, qui préservent les distances. Les voici :



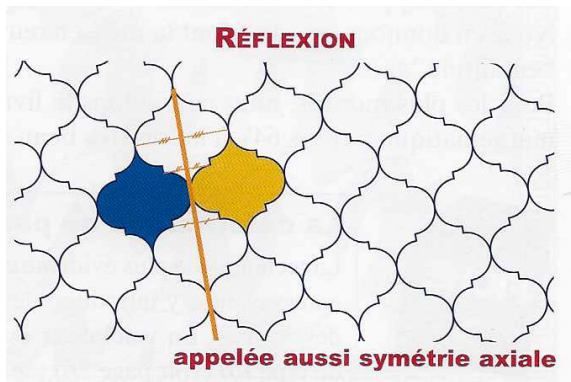
Isométries du plan

Pour envisager de comprendre les idées de cette démonstration, il faut affiner la définition de pavage et parler d'isométries du plan : transformation géométriques, qui préservent les distances. Les voici :



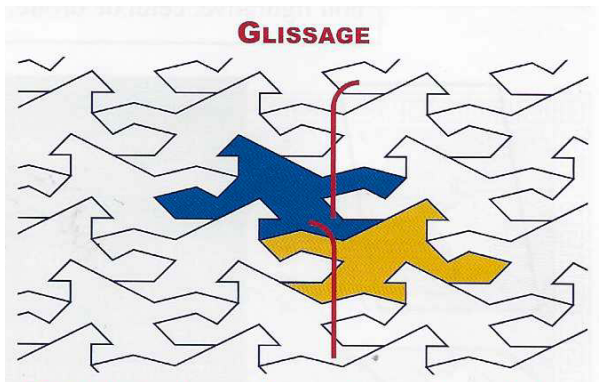
Isométries du plan

Pour envisager de comprendre les idées de cette démonstration, il faut affiner la définition de pavage et parler d'isométries du plan transformation géométriques, qui préservent les distances. Les voici :



Isométries du plan

Pour envisager de comprendre les idées de cette démonstration, il faut affiner la définition de pavage et parler d'isométries du plan : transformation géométriques, qui préservent les distances. Les voici :



Classification des Pavages

Idées de la démonstration

Une autre vision de la géométrie initiée par Félix Klein, le programme d'Erlangen et la notion de groupe.

Le théorème de Fédorov devient alors, il y a 17 groupes d'isométries qui laissent invariant un pavage de plan.

Il faut débiter par les frises ce qui est plus simple que sur le plan (7 groupes).

Classification des Pavages

Idées de la démonstration

Une autre vision de la géométrie initiée par Félix Klein, le programme d'Erlangen et la notion de groupe.

Le théorème de Fédorov devient alors, il y a 17 groupes d'isométries qui laissent invariant un pavage de plan.

Il faut débiter par les frises ce qui est plus simple que sur le plan (7 groupes).



Exemple :

Le groupe de cristallographie est composé de :

- Deux familles de translation
- Quatre familles de symétries centrales

Un algorithme de classification

Le pavage est-il identique à son image dans un miroir ?

Non	Quel est la rotation d'angle minimal non nul du pavage ?					
	0		Parallélogramique asymétrique	p1	R0	
	π		Parallélogramique symétrique	p2	R2	
	$\frac{2\pi}{3}$		Hexagonal 3-rotatif	p3	R3	
	$\frac{\pi}{2}$		Carré 4-rotatif	p4	R4	
	$\frac{\pi}{3}$		Hexagonal 6-rotatif	p6	R6	
Oui	Combien y-a-t-il de directions d'axes de symétrie ?					
	0	Famille de rotation d'angle :	0	Rectangulaire glissant	pg	M0
			π	Rectangulaire biglissant	pgg	M0R2
	1	Famille de rotation d'angle :	0 sans glissage	Rectangulaire monosymétrique	pm	M1
			0 avec glissage	Rhombique monosymétrique	cm	M1g
			π	Rectangulaire glissant symétrique	pmg	M1R2
	2	Famille de rotation d'angle :	0	Rectangulaire bisymétrique	pmm	M2
			π	Rhombique bisymétrique	cmm	M2R2
			$\frac{\pi}{2}$	Carré 4-rotatif glissant	p4g	M2R4
	3	Famille de rotation d'angle :	0	Héagonal tri-symétrique	p3m1	M3
			$\frac{2\pi}{3}$	Héagonal 3-rotatif symétrique	p31m	M3R3
	4	Pas de rotation		Carré totalement symétrique	p4m	M4
	6	Pas de rotation		Hexagonal totalement symétrique	p6m	M6

De l'Alhambra à Escher

Maurits Cornelis Escher, artiste néerlandais (1898-1972) s'inspire des mathématiques et notamment de pavages pour créer ses oeuvres :

L'Alhambra de Grenade est la source d'inspiration la plus fertile à laquelle j'ai bu.



De l'Alhambra à Escher

Maurits Cornelis Escher, artiste néerlandais (1898-1972) s'inspire des mathématiques et notamment de pavages pour créer ses oeuvres :

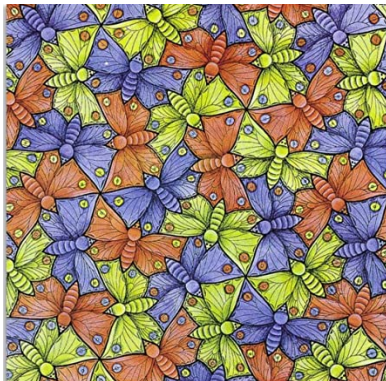
L'Alhambra de Grenade est la source d'inspiration la plus fertile à laquelle j'ai bu.



De l'Alhambra à Escher

Maurits Cornelis Escher, artiste néerlandais (1898-1972) s'inspire des mathématiques et notamment de pavages pour créer ses oeuvres :

L'Alhambra de Grenade est la source d'inspiration la plus fertile à laquelle j'ai bu.



De l'Alhambra à Escher

Maurits Cornelis Escher, artiste néerlandais (1898-1972) s'inspire des mathématiques et notamment de pavages pour créer ses oeuvres :

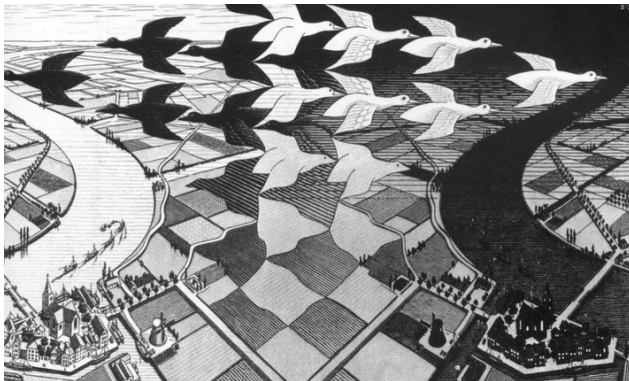
L'Alhambra de Grenade est la source d'inspiration la plus fertile à laquelle j'ai bu.



De l'Alhambra à Escher

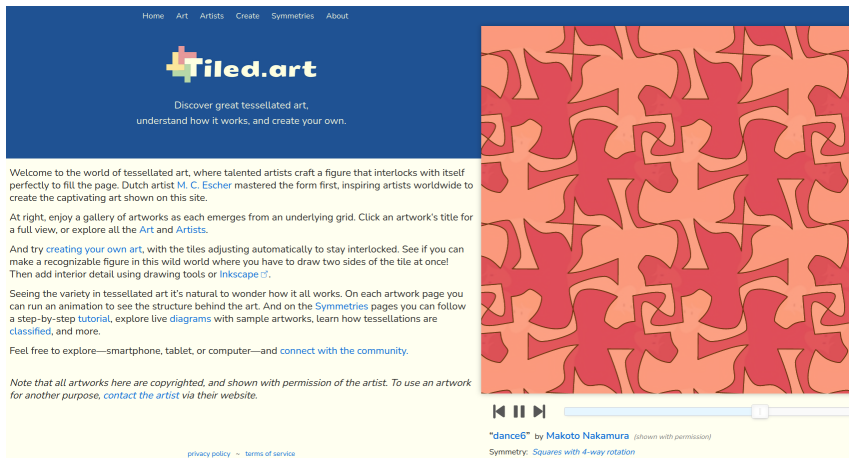
Maurits Cornelis Escher, artiste néerlandais (1898-1972) s'inspire des mathématiques et notamment de pavages pour créer ses oeuvres :

L'Alhambra de Grenade est la source d'inspiration la plus fertile à laquelle j'ai bu.



Construire ses propres pavages périodiques

Un site magnifique : [Tiled Art](#)



Home Art Artists Create Symmetries About

Tiled.art

Discover great tessellated art, understand how it works, and create your own.

Welcome to the world of tessellated art, where talented artists craft a figure that interlocks with itself perfectly to fill the page. Dutch artist [M. C. Escher](#) mastered the form first, inspiring artists worldwide to create the captivating art shown on this site.

At right, enjoy a gallery of artworks as each emerges from an underlying grid. Click an artwork's title for a full view, or explore all the [Art](#) and [Artists](#).

And try [creating your own art](#), with the tiles adjusting automatically to stay interlocked. See if you can make a recognizable figure in this wild world where you have to draw two sides of the tile at once! Then add interior detail using drawing tools or [Inkscape](#).

Seeing the variety in tessellated art it's natural to wonder how it all works. On each artwork page you can run an animation to see the structure behind the art. And on the [Symmetries](#) pages you can follow a step-by-step [tutorial](#), explore live [diagrams](#) with sample artworks, learn how tessellations are [classified](#), and more.

Feel free to explore—smartphone, tablet, or computer—and [connect with the community](#).

Note that all artworks here are copyrighted, and shown with permission of the artist. To use an artwork for another purpose, [contact the artist](#) via their website.

[privacy policy](#) → [terms of service](#)

« dance6 » by Makoto Nakamura (shown with permission)
Symmetry: Squares with 4-way rotation

Plan

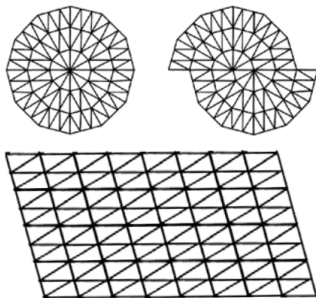
- 1 Introduction
- 2 Pavages Périodiques du Plan
- 3 Pavages Apériodiques
- 4 Pour aller plus loin

Ensemble de pavages apériodiques

Définition

Un ensemble de pavage apériodique du plan est un ensemble de pavés conduisant uniquement à des pavages non périodiques du plan.

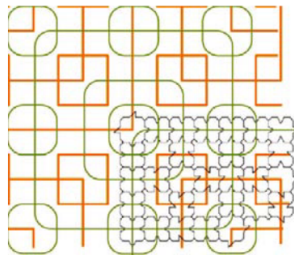
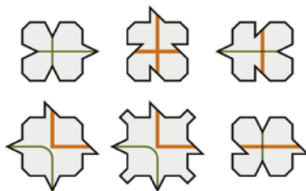
Par exemple ce pavage n'est pas apériodique



La course aux nombres de tuiles

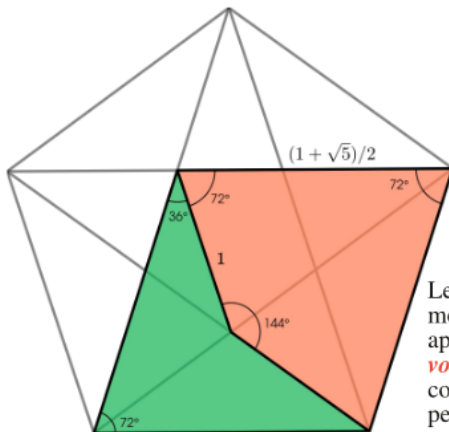
Existe-t'il des ensembles de pavage apériodique du plan ?

- 1964 Berger construit un ensemble de pavage apériodique de 20 426 tuiles
- 1971 Robinson utilise 6 tuiles



- 1974 Penrose utilise 2 tuiles

Pavage de Penrose

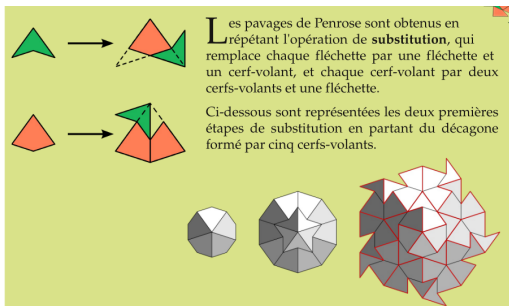


Les deux pavés de base du modèle présenté ici sont appelés *fléchette* et *cerf-volant*, et peuvent être construits à l'intérieur d'un pentagone régulier.

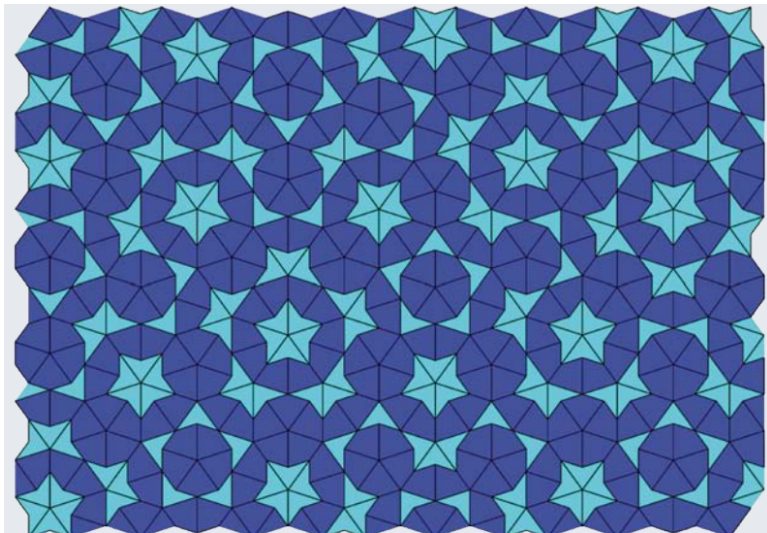
Pavage de Penrose, idées de la démonstration

Méthode : A t'on un ensemble de pavage apériodique ?

- Il faut trouver une méthode de construction du pavage : ici principe de substitution
- Il faut expliquer qu'il n'existe pas de pavage périodique avec les mêmes pièces : ici irrationalité des longueurs de la pièce



Pavage de Penrose

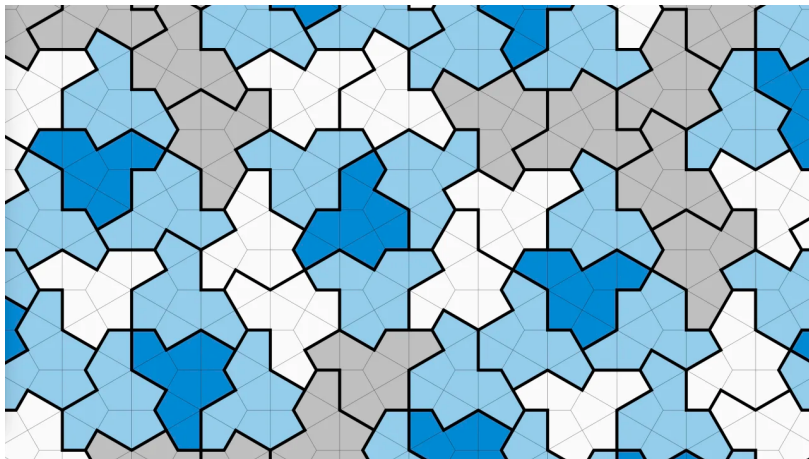


Des pavages sur du papier toilette

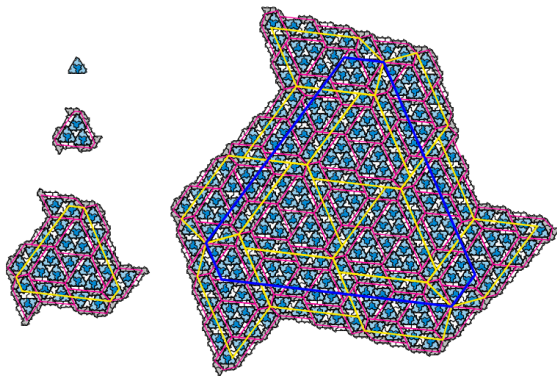


Le Grall : Einstein Tile

Découvert par D. Smith démontré par Myers, Kaplan et Goodman-Strauss 2022



Einstein Tile, idée de la démo



Tile(0, 1)



Tile(1, 4)



Tile(1, $\sqrt{3}$)



Tile(1, 1)



Tile($\sqrt{3}$, 1)



Tile(4, 1)



Tile(1, 0)

Plan

- 1 Introduction
- 2 Pavages Périodiques du Plan
- 3 Pavages Apériodiques
- 4 Pour aller plus loin

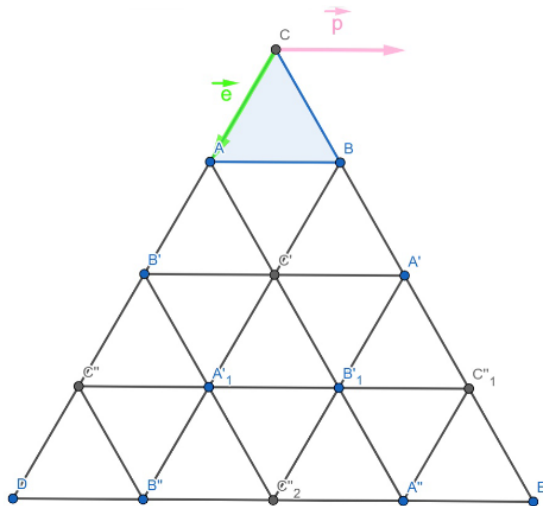
Application 1

Quasi-Cristaux : Découverts par D. Shechtman en 1982, prix nobel de chimie 2011



Application 2

Clin d'oeil à TFJM^2 , trajectoires dans un billard triangulaire.



Ouvertures

Pavages semi-régulier 7 types de pavages avec plusieurs polygones régulier.

Pavages en 3D → 235 types de pavages .

Pavage avec des fractales flocons de Von koch.

Pavages Hyperboliques.



Références

[Harp] Pierre de la Harpe. *Pavages*

[Ghy] E. Ghys *L'énigme des pentagones, Images des Maths*

[Chro] S Mehl *Chronomaths, article sur les pavages*

[Vel] M. Vella *L'Alhambra à la règle est au compas*

[Kang] A. Deledicq, R. Raba, *Le monde des pavages*

[Del] J-Paul Delahaye, *la quête du pavage apériodique unique*

[Einst] D Smith, J.S Myers, C.S Kaplan, C Goodman-Strauss *An periodic monotile*

Merci pour votre écoute !

Diaporama de la conférence en libre accès,modifiable ici :

